ность. Равенство (1.10) по-прежнему должно быть справедливым. Тривиальный гомоморфизм группы в себя — это отображение, переводящее каждый элемент группы в единичный элемент e. Менее тривиальный пример — гомоморфизм группы перестановок на мультипликативную группу, состоящую из двух элементов $\{1, -1\}$. Этот гомоморфизм переводит каждую чётную перестановку в 1, а каждую нечётную — в -1. Читателю следует проверить равенство (1.10) для этого примера, т. е. проверить, что композиция двух нечётных перестановок есть чётная перестановка, нечётной и чётной — нечётная и двух чётных — чётная.

1.5. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Множество V называется *векторным пространством* (над вещественными числами), если в нём задана бинарная операция, обозначаемая знаком „$+$", относительно которой оно образует абелеву группу (см. выше), и если определено умножение ($\cdot$) его элементов (векторов) на вещественные числа, удовлетворяющее следующим аксиомам (ниже $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — векторы, а a и b — вещественные числа):

(Vi) $a\cdot(\bar{x}+\bar{y})=(a\cdot\bar{x})+(a\cdot\bar{y})$,

(Vii) $(a+b)\cdot\bar{x}=(a\cdot\bar{x})+(b\cdot\bar{x})$,

(Viii) $(ab)\cdot\bar{x}=a(b\cdot\bar{x})$,

(Viv) $1\cdot\bar{x}=\bar{x}$.

Единичный элемент в группе V обозначается через $\bar{0}$ или просто 0. Помимо стандартных примеров векторных пространств отметим ещё, что векторными пространствами являются:

(i) множество всех $n\times n$-матриц, где „$+$" обозначает покомпонентное сложение, а „$\cdot$" обозначает покомпонентное умножение на вещественное число;

(ii) множество всех вещественных непрерывных функций $f(x)$, определённых на интервале $a\leqslant x\leqslant b$.

Обычно опускают точку, обозначающую умножение на число, и скобки, фигурирующие в аксиомах. Выражение вида

$$a\bar{x}+b\bar{y}+c\bar{z} \tag{1.11}$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$. Множество элементов $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m\}$ пространства V *линейно-независимо*, если нельзя найти вещественные числа $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, не все равные нулю, такие что

$$a_1\bar{x}_1+a_2\bar{x}_2+\ldots+a_m\bar{x}_m=0 \tag{1.12}$$

Линейно-независимое множество называется *максимальным*, если добавление любого вектора из V делает его линейно-зависимым. По определению это означает, что любой вектор из V может быть представлен в виде линейной комбинации элементов максимального множества, так что максимальное множество образует *базис* пространства V. Например, если V — множество вещественных $n \times n$-матриц, то одним из базисов служит совокупность n^2 различных матриц, у которых все матричные элементы нулевые, кроме одного. В общем случае число векторов базиса — это *размерность* пространства V. (Все базисы имеют одинаковое число элементов, если оно вообще конечно.) Пусть векторы $\{\bar{x}_i, i = 1, \ldots, n\}$ образуют базис. Тогда произвольный вектор $\bar{y}$ представим в виде

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{x}_i. \tag{1.13}$$

Числа $\{a_i, i = 1, \ldots, n\}$ называются *компонентами* вектора $\bar{y}$ в этом базисе.

Подпространство векторного пространства V — это подмножество в V, само являющееся векторным пространством. (Сравните это определение с определением подгруппы в § 1.4.) В частности, оно должно включать в себя нулевой вектор и линейные комбинации любых своих элементов. Говорят, что некоторое множество векторов $\{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m\}$ *порождает* подпространство в V, образованное всевозможными линейными комбинациями

$$a_1\bar{y}_1 + a_2\bar{y}_2 + \ldots + a_m\bar{y}_m$$

(векторы $\bar{y}_i$ называются при этом *образующими*). Если $m < n$, то это подпространство обязательно собственное, т. е. не совпадает с V. В любом случае размерность подпространства равна максимальному числу линейно-независимых векторов среди образующих.

Пока что ничего не было сказано о скалярных произведениях или о длинах векторов. Эти понятия являются дополнительными; они не всегда оказываются полезными в конкретных приложениях теории векторных пространств, так что нет необходимости включать их в общее определение векторного пространства. Один из способов ввести эти понятия — определить *норму* на векторном пространстве. *Нормированное векторное пространство* V — это векторное пространство с заданной на нём вещественнозначной функцией n (т. е. функцией, которая сопоставляет каждому вектору $\bar{x}$ вещественное число $n(\bar{x})$, называемое его нормой), удовлетворяющей следующим аксиомам:

(Ni) $n(\bar{x}) \geqslant 0$ для всех $\bar{x}$ из V, причём $n(\bar{x}) = 0$, если и только если $\bar{x} = 0$;

(Nii) $n(a\bar{x}) = |a| n(\bar{x})$ для всех a из R и $\bar{x}$ из V;

(Niii) $n(\bar{x} + \bar{y}) \leqslant n(\bar{x}) + n(\bar{y})$ для всех $\bar{x}$, $\bar{y}$ из V.

Есть много функций, удовлетворяющих этим аксиомам. Рассмотрим, например, само R^n как векторное пространство, где сложение векторов задаётся равенством

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ \ldots, \ x_n + y_n), \tag{1.14}$$

а умножение на вещественное число — равенством

$$a\mathbf{x} = (ax_1, \ \ldots, \ ax_n). \tag{1.15}$$

Тогда для трёх из четырёх функций расстояния, определённых в § 1.1, мы можем ввести норму как расстояние вектора от начала координат:

$$n(\mathbf{x}) = [(x_1)^2 + (x_2)^2 + \ \ldots \ + (x_n)^2]^{1/2}, \tag{1.16}$$

$$n'(\mathbf{x}) = [4(x_1)^2 + 0{,}1(x_2)^2 + \ \ldots \ + (x_n)^2]^{1/2}, \tag{1.17}$$

$$n'''(\mathbf{x}) = \max(|x_1|, \ |x_2|, \ \ldots, \ |x_n|). \tag{1.18}$$

Читателю предоставляется возможность проверить справедливость аксиом (Ni)—(Niii) для каждой из этих норм. Полезно также убедиться в том, что $d''(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *не* определяет нормы.

Первые две нормы отличаются от третьей тем, что они удовлетворяют еще одной, иногда весьма полезной аксиоме — *тождеству параллелограмма*:

(Niv) $[n(\bar{x} + \bar{y})]^2 + [n(\bar{x} - \bar{y})]^2 = 2[n(\bar{x})]^2 + 2[n(\bar{y})]^2$.

Норма, удовлетворяющая этому тождеству, позволяет определить билинейное симметрическое *скалярное произведение* двух векторов

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1}{4}[n(\bar{x} + \bar{y})]^2 - \frac{1}{4}[n(\bar{x} - \bar{y})]^2. \tag{1.19}$$

Билинейность означает, что

$$(a\bar{x} + b\bar{y}) \cdot \bar{z} = a(\bar{x} \cdot \bar{z}) + b(\bar{y} \cdot \bar{z}) \tag{1.20}$$

и

$$\bar{z} \cdot (a\bar{x} + b\bar{y}) = a(\bar{z} \cdot \bar{x}) + b(\bar{z} \cdot \bar{y}). \tag{1.21}$$

Симметричность означает, что

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}. \tag{1.22}$$

Кроме того, скалярное произведение является положительно-определённым, т. е.

$$\bar{x}\cdot\bar{x} \geqslant 0 \text{ и } \bar{x}\cdot\bar{x} = 0, \quad \text{лишь если } \bar{x} = \bar{0}. \tag{1.23}$$

Это очевидно, так как $\bar{x}\cdot\bar{x} = [n(\bar{x})]^2$.

Определённая выше норма $n(\mathbf{x})$ на R^n называется *эвклидовой нормой*. Векторное пространство R^n, рассматриваемое вместе с этой нормой, мы будем обозначать через E^n и называть n-мерным эвклидовым пространством. Важно уяснить себе различие между R^n и E^n: первое — это просто совокупность всех наборов $(x_1, \ldots, x_n)$ без привлечения какого-либо расстояния или нормы. Полезность такого различения станет понятной в гл. 2.

Для того чтобы ввести скалярное произведение и доказать его билинейность и симметричность, нужны только аксиомы (Nii) и (Niv). Если допустить нарушение свойств (Ni) и (Niii), то мы получим *псевдонорму*; скалярное произведение вектора с самим собой в этом случае не обязано быть положительным. Примером физической теории, использующей псевдонорму, является специальная теория относительности. Ниже мы рассмотрим её более или менее подробно.

Хотя мы определили только векторные пространства над вещественными числами, не составляет труда определить их и над комплексными числами, просто дозволив числам a и b в (Vi)—(Viv) быть комплексными. Тогда компоненты векторов будут комплексными. Такие векторные пространства часто используются в квантовой механике.

1.6. АЛГЕБРА КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

Линейное преобразование T векторного пространства V — это отображение V на себя, удовлетворяющее свойству линейности (ср. с (1.20) и (1.21))

$$T(a\bar{x} + b\bar{y}) = aT(\bar{x}) + bT(\bar{y}). \tag{1.24}$$

Если в V задан базис $\{\bar{e}_i, i = 1, \ldots, n\}$, то

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i\bar{e}_i, \tag{1.25}$$

$$T(\bar{x}) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\bar{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_iT(\bar{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} T_{ij}\bar{e}_j, \tag{1.26}$$

где каждый вектор $T(\bar{e}_i)$ мы заменим его разложением в данном базисе $\sum_{j=1}^{n} T_{ij}\bar{e}_j$. Числа T_{ij} называются компонентами (или координатами) преобразования T (в базисе $\{\bar{e}_i\}$); они образуют квадратную $n\times n$-матрицу.