Кроме того, скалярное произведение является положительно-определённым, т. е.

$$\bar{x}\cdot\bar{x} \geqslant 0 \text{ и } \bar{x}\cdot\bar{x} = 0, \quad \text{лишь если } \bar{x} = \bar{0}. \tag{1.23}$$

Это очевидно, так как $\bar{x}\cdot\bar{x} = [n(\bar{x})]^2$.

Определённая выше норма $n(\mathbf{x})$ на $R^n$ называется *эвклидовой нормой*. Векторное пространство $R^n$, рассматриваемое вместе с этой нормой, мы будем обозначать через $E^n$ и называть $n$-мерным эвклидовым пространством. Важно уяснить себе различие между $R^n$ и $E^n$: первое — это просто совокупность всех наборов $(x_1, \ldots, x_n)$ без привлечения какого-либо расстояния или нормы. Полезность такого различения станет понятной в гл. 2.

Для того чтобы ввести скалярное произведение и доказать его билинейность и симметричность, нужны только аксиомы (Nii) и (Niv). Если допустить нарушение свойств (Ni) и (Niii), то мы получим *псевдонорму*; скалярное произведение вектора с самим собой в этом случае не обязано быть положительным. Примером физической теории, использующей псевдонорму, является специальная теория относительности. Ниже мы рассмотрим её более или менее подробно.

Хотя мы определили только векторные пространства над вещественными числами, не составляет труда определить их и над комплексными числами, просто дозволив числам $a$ и $b$ в (Vi)—(Viv) быть комплексными. Тогда компоненты векторов будут комплексными. Такие векторные пространства часто используются в квантовой механике.

## 1.6. АЛГЕБРА КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

*Линейное преобразование* $T$ векторного пространства $V$ — это отображение $V$ на себя, удовлетворяющее свойству линейности (ср. с (1.20) и (1.21))

$$T(a\bar{x} + b\bar{y}) = aT(\bar{x}) + bT(\bar{y}). \tag{1.24}$$

Если в $V$ задан базис $\{\bar{e}_i, i = 1, \ldots, n\}$, то

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i\bar{e}_i, \tag{1.25}$$

$$T(\bar{x}) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\bar{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(\bar{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} T_{ij}\bar{e}_j, \tag{1.26}$$

где каждый вектор $T(\bar{e}_i)$ мы заменим его разложением в данном базисе $\sum_{j=1}^{n} T_{ij}\bar{e}_j$. Числа $T_{ij}$ называются компонентами (или координатами) преобразования $T$ (в базисе $\{\bar{e}_i\}$); они образуют квадратную $n\times n$-матрицу.

Отметим весьма важное алгебраическое соотношение, которое будет часто использоваться в дальнейшем:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \left( \sum_{j=1}^{m} B_{ij} C_j \right) = \sum_{j=1}^{m} C_j \left( \sum_{i=1}^{n} B_{ij} A_i \right). \tag{1.27}$$

Другими словами, порядок суммирования не играет никакой роли. Поэтому обычно это выражение записывают в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_i B_{ij} C_j \text{ или просто } \sum_{i,\,j} A_i B_{ij} C_j, \tag{1.28}$$

подчеркивая тем самым, что эта сумма является просто суммой соответствующих произведений по всевозможным комбинациям индексов.

Два последовательных линейных преобразования $T$ и $U$, действующих на пространстве $V$, дают новое преобразование $UT$:

$$\begin{aligned} UT(\bar{x}) = U(T(\bar{x})) = U\left( \sum_{i,\,j} a_i T_{ij} \bar{e}_j \right) &= \sum_{ijk} a_i T_{ij} U_{jk} \bar{e}_k \\ &= \sum_{ik} a_i \left( \sum_j T_{ij} U_{jk} \right) \bar{e}_k. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Отсюда вытекает, что компоненты произведения $UT$ имеют вид

$$\sum_j T_{ij} U_{jk}. \tag{1.30}$$

Важно усвоить, что если мы запишем $T_{ij}$ в виде матрицы (индекс $i$ нумерует строки, а $j$ — столбцы) и точно так же запишем $U_{jk}$, то сумма (1.30) в точности совпадёт с выражением для *матричного* произведения соответствующих матриц. В общем случае матричное произведение двух матриц $A_{ij}$ и $B_{ij}$ имеет вид

$$(AB)_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{jk} = \sum_j B_{jk} A_{ij}, \tag{1.31}$$

$$(BA)_{ik} = \sum_j B_{ij} A_{jk} = \sum_j A_{jk} B_{ij}. \tag{1.32}$$

Отметим, что третье выражение в равенстве (1.31) равно второму, поскольку $A_{ij}$ и $B_{ij}$ суть просто числа, а умножение чисел коммутативно. Сравнивая третий член в равенстве (1.31) со вторым в равенстве (1.32), мы видим, что важен не порядок сомножителей, а взаимное расположение индексов суммирования и свободных индексов. Различие этих двух выражений означает, что матричное умножение, вообще говоря, не коммутативно.

Матричные элементы *транспонированной* к $A$ матрицы $A^{\mathrm{T}}$ имеют вид

$$(A^{\mathrm{T}})_{ij} = A_{ji}. \tag{1.33}$$

(Если матрица $A$ комплексная, то её сопряженная $A^*$ определяется равенством $(A^*)_{ij} = \bar{A}_{ji}$, где черта обозначает комплексное сопряжение.) *Единичная* матрица $I$ имеет всюду на главной диагонали единицы, а вне главной диагонали — нули; это записывается в виде

$$(I)_{ij} = \delta_{ij}, \tag{1.34}$$

где $\delta_{ij}$ — символ Кронекера, т. е. $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. *Тождественное преобразование* переводит, по определению, каждый вектор $\bar{x}$ в себя. Его компоненты в любом базисе равны $\delta_{ij}$. Матрица $A^{-1}$, *обратная* к матрице $A$, определяется равенством

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I. \tag{1.35}$$

Не каждая матрица имеет обратную; очевидным примером является нулевая матрица. Если обратная матрица существует, то она единственна. Ясно, что $A$ будет обратной для $A^{-1}$. Если $A^{-1}$ существует, то матрица $A$ называется *невырожденной* (в противном случае — *вырожденной*). Множество всех невырожденных $n \times n$-матриц образует группу относительно операции матричного умножения. Её единицей является единичная матрица $I$. Эта группа служит очень важным примером группы Ли и обозначается через $GL(n, R)$; мы изучим её детально в гл. 3.

*Определитель* (*детерминант*) $2 \times 2$-матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

обозначаемый через $\det(A)$, определяется равенством

$$\det(\mathrm{A}) = ad - bc. \tag{1.36}$$

Определитель $n \times n$-матрицы определяется индуктивно при помощи следующего *правила разложения по строке*. *Алгебраическое дополнение* элемента $a_{ij}$ матрицы $A$, обозначаемое через $a^{ij}$, — это число, равное взятому с коэффициентом $(-1)^{i+j}$ определителю $(n-1) \times (n-1)$-матрицы, получающейся из матрицы $A$ вычёркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит $a_{ij}$. Так, например, в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \tag{1.37}$$

алгебраическое дополнение элемента $a$ равно $ek - fh$, а элемента $f$ равно $bg - ah$. Определитель матрицы $A$ определяется правилом

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a^{ij} \text{ (для любого фиксированного } i). \quad (1.38)$$

Для матрицы (1.37), беря $i = 1$, получим

$$\det(A) = a(ek - fh) + b(fg - dk) + c(dh - eg),$$

а взяв $i = 2$, будем иметь

$$\det(A) = d(hc - bk) + e(ak - cg) + f(bg - ah);$$

оба эти выражения совпадают. Это правило выглядит весьма загадочным при том способе изложения, который мы избрали. Оно станет более понятным, когда мы снова вернёмся к нему в § 4.12.

Каждую из строк (или столбцов) $n \times n$-матрицы можно считать координатами вектора в некотором $n$-мерном пространстве. Определитель матрицы обращается в нуль, если и только если $n$ векторов, определённых его строками (или столбцами), линейно-зависимы. Это вытекает из ряда других свойств определителя: если одну строку умножить на константу $\lambda$, то весь определитель умножится на $\lambda$; определитель не изменится, если какую-нибудь одну строку заменить на поэлементную сумму этой строки и произвольного кратного любой другой строки; при перестановке двух любых строк определитель меняет знак. Все эти свойства остаются верными, если заменить всюду «строка» на «столбец». Они опять же станут более понятными после изучения § 4.12.

Построим по данной матрице $A$ матрицу $B$, полагая

$$b_{ij} = a^{ji}/\det(A). \quad (1.39)$$

Из (1.38) вытекает, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = 1 \text{ для любого фиксированного } i.$$

Оказывается (вы можете убедиться в этом «экспериментально»), что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = \delta_{ik};$$

другими словами, матрица $B$, задаваемая формулой (1.39), является обратной для матрицы $A$. Следовательно, матрица $A$ невырожденна, если и только если $\det(A) \neq 0$.

*Следом* матрицы $A$ называется сумма её диагональных элементов:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_i a_{ii}. \tag{1.40}$$

*Преобразование подобия* матрицы $A$ при помощи невырожденной матрицы $B$ — это отображение $A \mapsto B^{-1}AB$. Приведём некоторые полезные формулы, которые могут быть доказаны на основе данных выше определений:

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}, \tag{1.41}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \tag{1.42}$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B \tag{1.43}$$

$$\mathrm{tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{tr}(A), \tag{1.44}$$

$$\det(B^{-1}AB) = \det(A), \tag{1.45}$$

$$\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A). \tag{1.46}$$

Говорят, что $n \times n$-матрица $A$ имеет *собственное значение* $\lambda$ и (отвечающий ему) *собственный вектор* $\bar{V} \neq 0$, если

$$A(\bar{V}) = \lambda \bar{V}, \tag{1.47}$$

где в левой части равенства $A$ действует как линейное преобразование на $\bar{V}$. В координатной форме это равенство запишется в виде $n$ уравнений

$$\sum_j (a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) V_j = 0. \tag{1.48}$$

Они имеют ненулевое решение $\bar{V}$, если и только если

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{1.49}$$

Собственные значения $A$ являются решениями уравнения (1.49), которое, очевидно, является уравнением $n$-й степени по $\lambda$. Каждому вещественному решению $\lambda$ отвечает собственный вектор. Если некоторое решение комплексное, то отвечающих ему вещественных собственных векторов нет, так что в случае, когда $\bar{V}$ пробегает вещественное векторное пространство, имеется фундаментальное различие между вещественными собственными значениями и комплексными. Если же рассматриваемое векторное пространство — и матрица $A$ — комплексные, то никакой разницы между вещественными и комплексными решениями нет. Пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — все $n$ корней уравнения (1.49) (каждый корень считается столько раз, какова его кратность). Обратим внимание на следующие три важных результата:

$$\{\text{собственные значения } A^{\mathrm{T}}\} = \{\text{собственные значения } A\}, \tag{1.50}$$

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n, \tag{1.51}$$

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n. \tag{1.52}$$

Последние два утверждения можно доказать, явно расписав многочлен в левой части (1.49). Первое вытекает из (1.46).

## 1.7. БИБЛИОГРАФИЯ

В перечисленных ниже руководствах материал излагается примерно на том уровне сложности, который принят в данной книге. Назначение этого списка — подвести читателя к уровню излагаемого в книге материала; он никоим образом не является исчерпывающим перечнем рекомендуемых книг для чтения.

Элементы математического анализа: G. B. Thomas, Calculus and Analytic Geometry (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960).

Механика: K. R. Symon, Mechanics (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1953), или H. Goldstein, Classical Mechanics (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950) [имеется перевод: Голдстейн Г. Классическая механика. 2-е изд. — М.: Наука, 1975] или Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: Наука, 1965.

Термодинамика: M. W. Zemansky, Heat and Thermodynamics (McGraw-Hill, New York, 1957) или E. Fermi, Thermodinamics (Dover, New York, 1956) [имеется перевод: Ферми Э. Термодинамика. — Харьков: 1973].

Электродинамика: J. R. Reitz & F. J. Milford, Foundation of Electromagnetic Theory (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960) или J. B. Marion, Classical Electromagnetic Radiation (Academic Press, New York, 1965).

Специальная теория относительности: A. P. French, Special Relativity (Nelson, London, 1968) или E. F. Taylor & J. A. Wheeler, Spacetime Physics (Freeman, San Francisco, 1965).

Квантовая механика: L. I. Schiff, Quantum Mechanics (McGraw-Hill, New York, 1955).

Материал этой главы может быть более глубоко изучен по следующим книгам:

R. A. Dean, Elements of Abstract Algebra (Wiley, New York, 1967); W. Rudin. Principles of Mathematical Analysis (McGraw-Hill, New York, 1964) [имеется перевод: Рудин У. Основы математического анализа. — М.: Мир, 1966];

E. W. Packel, Functional Analysis, a Short Course (International Textbook Co., Glasgow, 1974);

F. Riesz & B. Sz.-Nagy, Functional Analysis (Ungar, New York, 1955) [имеется перевод: Рисс Ф, Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979].

A. Wallace, Differential Topology: First Steps (Benjamin, Reading, Mass., 1968) [имеется перевод в кн.: Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. — М.: Мир, 1972].

Приведём теперь список основных руководств, в которых излагается материал последующих глав — излагается, как правило, более глубоко и строго. Ниже мы будем ссылаться на эти руководства по фамилиям авторов.