

три важных результата:

$$\{\text{собственные значения } A^T\} = \{\text{собственные значения } A\}, \quad (1.50)$$

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n, \quad (1.51)$$

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n. \quad (1.52)$$

Последние два утверждения можно доказать, явно расписав многочлен в левой части (1.49). Первое вытекает из (1.46).

1.7. БИБЛИОГРАФИЯ

В перечисленных ниже руководствах материал излагается примерно на том уровне сложности, который принят в данной книге. Назначение этого списка — подвести читателя к уровню излагаемого в книге материала; он никоим образом не является исчерпывающим перечнем рекомендуемых книг для чтения.

Элементы математического анализа: G. B. Thomas, *Calculus and Analytic Geometry* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960).

Механика: K. R. Symon, *Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1953), или H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950) [имеется перевод: Голдстейн Г. Классическая механика. 2-е изд. — М.: Наука, 1975] или Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика*. — М.: Наука, 1965.

Термодинамика: M. W. Zemansky, *Heat and Thermodynamics* (McGraw-Hill, New York, 1957) или E. Fermi, *Thermodynamics* (Dover, New York, 1956) [имеется перевод: Ферми Э. Термодинамика. — Харьков: 1973].

Электродинамика: J. R. Reitz & F. J. Milford, *Foundation of Electromagnetic Theory* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960) или J. B. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation* (Academic Press, New York, 1965).

Специальная теория относительности: A. P. French, *Special Relativity* (Nelson, London, 1968) или E. F. Taylor & J. A. Wheeler, *Spacetime Physics* (Freeman, San Francisco, 1965).

Квантовая механика: L. I. Schiff, *Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1955).

Материал этой главы может быть более глубоко изучен по следующим книгам:

R. A. Dean, *Elements of Abstract Algebra* (Wiley, New York, 1967); W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis* (McGraw-Hill, New York, 1964) [имеется перевод: Рудин У. Основы математического анализа. — М.: Мир, 1966];

E. W. Packer, *Functional Analysis, a Short Course* (International Textbook Co., Glasgow, 1974);

F. Riesz & B. Sz.-Nagy, *Functional Analysis* (Ungar, New York, 1955) [имеется перевод: Рисс Ф, Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979].

A. Wallace, *Differential Topology: First Steps* (Benjamin, Reading, Mass., 1968) [имеется перевод в кн.: Миллор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. — М.: Мир, 1972].

Приведём теперь список основных руководств, в которых излагается материал последующих глав — излагается, как правило, более глубоко и строго. Ниже мы будем ссылаться на эти руководства по фамилиям авторов.

Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette & M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics* (North-Holland, Amsterdam, 1977). Исчерпывающий курс, рассчитанный на математически подготовленных физиков. Особенно хорошо изложены дифференциальные уравнения.

R. Abraham & I. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, rev. 2nd ed. (Benjamin/Gummings, Reading, Mass., 1978). Эта книга, как видно из её названия, охватывает меньше материала, чем предыдущая, зато с соответствием большей глубиной. Отличается вниманием к глобальным проблемам, а также обширной библиографией. Второе издание существенно расширено по сравнению с первым.

F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups* (Scott, Foresman, Glenview, Ill., 1971). Доступное для студентов старших курсов введение в теорию дифференцируемых многообразий и групп Ли. Особенно сильны разделы, посвящённые группам Ли и теории когомологий.

M. Spivak, *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, four volumes (Publish or Perish, Boston, 1970). Как показывает само название, книга рассчитана на аспирантов-математиков. Написана в свободной манере, местами с юмором; много упражнений, разбирается много подробно.

Есть и другие заслуживающие внимания книги по дифференциальной геометрии. Для первоначального знакомства полезны N. J. Hicks, *Notes on Differential Geometry* (D. Van Nostrand, New York, 1965) или R. L. Bishop & S. I. Goldberg, *Tensor Analysis on Manifolds* (Macmillan, London, 1968). В том же «современном» духе, и настоящая книга, написана книга C. T. J. Dodson & T. Poston, *Tensor Geometry* (Pitman, London, 1977). В ней обстоятельно обсуждаются многие вопросы, которых мы лишь касаемся, правда ничего не говорится об общих производных Ли или исчислении дифференциальных форм. Читатель, которому прыжок от данной книги к, скажем, Choquet-Bruhat et al. покажется слишком далёким, может сперва попробовать почитать первую половину книги Dodson & Poston. Заслуженным авторитетом пользуются монографии S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, two volumes (Interscience, New York, 1963 and 1969) [имеется перевод: Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1981] и J. A. Schouten, *Ricci Calculus* (Springer, Berlin, 1954); последняя написана в несколько старомодных обозначениях.

Не удивительно, что одни из лучших изложений дифференциальной геометрии для физиков содержатся в руководствах по общей теории относительности. Рекомендую книгу C. W. Misner, K. S. Thorne & J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973) [имеется перевод: Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. — М.: Мир, 1976], в которой дифференциальная геометрия излагается на протяжении нескольких глав в том же духе и примерно в тех же обозначениях, что и у меня здесь. На более высоком уровне сложности и более сжато написана глава по дифференциальной геометрии в книге S. W. Hawking & G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space — Time* (Cambridge University Press, 1973). Введением широкого диапазона является статья «Дифференциальная геометрия», написанная Ч. Мизнером для сборника *Relativity, Groups and Topology*, ed. C. DeWitt & B. DeWitt (Gordon & Breach, New York, 1964). Другое полезное введение — статья Б. Шмидта в сборнике *Relativity, Astrophysics and Cosmology*, ed. W. Israel (Reidel, Dordrecht, 1973). Также рассчитаны на физиков книги: R. Hermann, *Differential Geometry and the Calculus of Variations* (Academic Press, New York, 1968); D. Lovelock & H. Rund, *Tensors, Differential Forms and Variational Principles* (Wiley, New York, 1975); H. Flanders, *Differential Forms* (Academic Press, New York, 1963); Von Westenholz, *Differential Forms in Mathematical Physics* (North-Holland, Amsterdam, 1979).