2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ТЕНЗОРЫ

Трудно представить себе физическую задачу, в которой не приходится рассматривать какой-либо пространственный континуум. Это может быть физическое трёхмерное пространство, четырёхмерное пространство-время, фазовое пространство (для задач из классической или квантовой механики), пространство всех термодинамически равновесных состояний или даже ещё более абстрактное пространство. Все эти пространства обладают различными геометрическими свойствами, но есть в них и нечто общее, и это общее связано с тем, что они являются непрерывными пространствами в отличие от, скажем, решёток, состоящих из изолированных точек. Дифференциальная геометрия именно потому важна для современной физики, что она изучает как раз эти свойства, общие для всех таких пространств. Наиболее фундаментальные из этих свойств кладутся в основу определения дифференцируемого многообразия — точного математического эквивалента для слова «пространство».

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Как и в § 1.1, мы обозначаем через R^n совокупность всех наборов из n вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Множество (состоящее из «точек») M называется *многообразием*, если каждая его точка имеет открытую окрестность, допускающую непрерывное 1-1-отображение (называемое координатным) на открытое множество в R^n для некоторого n. (Читателю, который не вполне уверен, что смысл выражения «1-1-отображение *на*» ему понятен, стоит заглянуть в § 1.2.) Попросту говоря, M локально «похоже» на R^n. *Размерность* многообразия M — это, разумеется, число n. Важно, что в определении участвуют только открытые множества, а не всё M или всё R^n, так что мы не налагаем никаких ограничений на глобальную топологию M. Это станет ясно при разборе примера со сферой в § 2.2. Обратим внимание, что от отображения требуется только взаимная однозначность и не требуется сохранения длин, углов или других геометрических величин. На этом уровне геометрии понятие длины просто даже не определено, и мы встретимся в дальнейшем с примерами физических приложений, в которых и не нужно вводить понятие расстояния между точками наших многообразий. На этом элементарном («примитивном») уровне геометрии мы лишь хотим добиться того, чтобы локальная топология нашего пространства (как она описана в § 1.1) была такой же, как и для R^n. Многообразие — это пространство с такой топологией.

По определению координатное отображение сопоставляет точке P многообразия M набор из n чисел $(x_1(P), \ldots, x_n(P))$

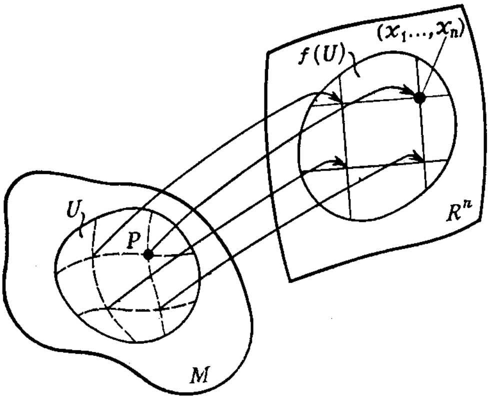

Рис. 2.1. Отображение f взаимно-однозначно отображает область U из M на область $f(U)$ из R^n. Это отображение сопоставляет каждой точке P однозначно определённый набор n чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тем самым в U возникает система координат, изображённая при помощи штриховых линий, являющихся образами при отображении f^{-1} стандартной координатной сетки в R^n.

(см. рис. 2.1). Эти числа $x_1(P), \ldots, x_n(P)$ называются *координатами* P относительно этого отображения. Одна из возможных точек зрения на понятие n-мерного многообразия — это просто считать его множеством, которое может быть задано n независимыми координатами в некоторой окрестности своей точки: именно, эти координаты на самом деле *определяют* требуемое отображение в R^n. В дальнейшем мы будем использовать стандартные обозначения для координат, нумеруя их верхними индексами: $x^1(P), x^2(P), \ldots, x^n(P)$ — это n координат точки P (а не степени $x(P)$!) относительно координатного отображения.

В результате предшествующего обсуждения мы получили некое общее представление о том, что такое многообразие, но для того, чтобы получить что-нибудь большее, нужно рассмотреть более внимательно свойства координатных отображений. Пусть f — инъективное отображение некоторой окрестности U точки P из M на открытое множество $f(U)$ в R^n.

Как мы уже отмечали выше, окрестность U не обязана содержать *всё* M (как мы увидим в § 2.2, в случае сферы она и *не может* содержать всю сферу), так что должны быть и другие окрестности со своими собственными отображениями, причём каждая точка из M должна лежать по крайней мере в одной такой окрестности. Пара «окрестность плюс её отображение» называется *картой*. Легко видеть, что эти открытые окрестности должны перекрываться, раз любая точка из M должна содержаться по крайней мере в одной из них: именно эти перекрытия важны для дальнейшей детализации понятия многообразия (см. рис. 2.2). Пусть окрестность V частично покрывает окрестность U, и пусть задано отображение g окрестности V на открытую область в R^n. Эта открытая область может считаться совершенно отличной от той, на которую f отображает окрестность U. Пересечение V и U открыто (по аксиоме (Ti) из § 1.1) и задаётся двумя различными системами координат, отвечающими отображениям f и g. Имеется, стало быть, некоторая связь между этими координатными системами. Чтобы её найти, возьмём точку в образе перекрытия относительно f (т. е. точку из R^n), скажем точку $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ на рис. 2.3. Отображение f обладает обратным f^{-1}, поэтому имеется единственная точка S, лежащая в перекрытии, которая имеет именно эти числа своими координатами относительно отображения f. Пусть теперь g сопоставляет S другую точку в R^n, скажем $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$. (Тем самым построено отображение $R^n \to R^n$ — композиция $g \cdot f^{-1}$.) В результате мы получаем функциональные соотношения (*преобразование координат*)

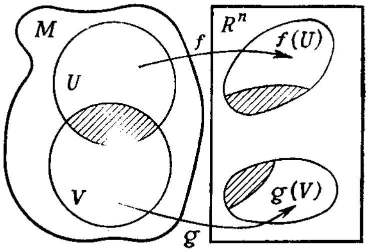

Рис. 2.2. Окрестности U и V из M перекрываются (затушёванная область). Соответствующие координатные отображения f и g в R^n дают в зоне перекрытия два различных отображения (а, следовательно, две системы координат). Соответствие между этими координатами характеризует класс гладкости многообразия.

$$
\begin{aligned}
y^1 &= y^1(x^1, x^2, \ldots, x^n), \\
y^2 &= y^2(x^1, x^2, \ldots, x^n), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y^n &= y^n(x^1, x^2, \ldots, x^n).
\end{aligned}
$$

Если все частные производные порядка не выше k всех этих функций $\{y^i\}$ по переменным $\{x^i\}$ существуют и непрерывны, то отображения f и g (более точно, карты (U, f) и (V, g)) называются C^k-*согласованными*. (Обозначение C^k было введено в § 1.2 для дифференцируемости.) Если можно построить целую систему карт (называемую, вполне уместно, *атласом*) так, чтобы каждая точка многообразия M содержалась по крайней мере в одной окрестности и любая карта была C^k-согласована с любой другой, с ней перекрывающейся, то многообразие M называется *C^k-многообразием*. Многообразия класса C^1 (а тем самым и класса C^k при $k > 1$) называются *дифференцируемыми* (или *гладкими*) *многообразиями*.

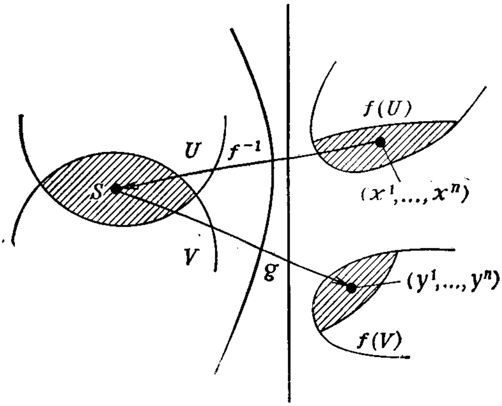

Рис. 2.3. Увеличение рис. 2.2, демонстрирующее, как перекрытие порождает отображение R^n в R^n, являющееся композицией отображений f^{-1} и g (и обозначаемое через $g \circ f^{-1}$).

Дифференцируемость многообразия позволяет снабдить его чрезвычайно богатой структурой: на нём можно определить тензоры, дифференциальные формы и производные Ли. Эта дифференциальная структура и будет для нас главным предметом изучения. Напомним, что мы не вводили понятия расстояния на M, поэтому у нас нет пока никаких представлений о «форме» или «кривизне» M. Мы знаем только, что локально оно гладкое, и именно это нужно для дальнейшего.

В большинстве приложений мы будем иметь дело с C^∞-многообразиями, но обычно это не так уж и необходимо. Иногда нам будет удобно предположить многообразие аналитическим (класса C^ω; функции $\{y^i\}$ — аналитические функции от $\{x^i\}$); как уже упоминалось в § 1.2, предполагать аналитичность всюду, где только удобно, вполне в духе физиков. Наша точка зрения такова, что при первоначальном изучении этого предмета лучше наложить более жёсткие ограничения на многообразия, чтобы увидеть, в чём же суть дифференциальной геометрии. После того как изучающий лучше освоится с предметом, он может подумать о том, как можно было бы ослабить эти ограничения. В соответствии с такой точкой зрения читатель этой книги всюду должен иметь в виду, что все многообразия в этой книге дифференцируемы столько раз, сколько нужно для наших рассуждений.

2.2. СФЕРА КАК МНОГООБРАЗИЕ

Одним из простейших примеров многообразия, иллюстрирующим важность того обстоятельства, что допускается более чем одна карта, служит сфера (поверхность шара). Рассмотрим двумерную сферу (обозначаемую через S^2) — множество

Рис. 2.4. Маленькая окрестность точки P на сфере S^2 взаимно-однозначно отображается на круг в R^2.

точек в R^3, для которых $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=\text{const}$. Каждая её точка имеет достаточно малую окрестность, допускающую 1-1-отображение на круг в R^2 (см. рис. 2.4). Ясно, что

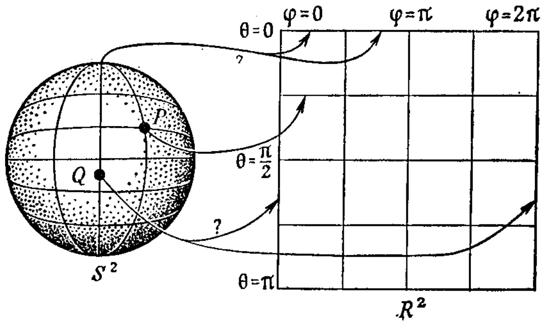

Рис. 2.5. Обычные сферические координаты задают отображение из S^2 в R^2, "хорошее" для обыкновенных точек типа P. А что является образом северного полюса? И какую из двух указанных точек считать образом точки Q, лежащей на меридиане $\varphi=0$?

соответствующее отображение никоим образом не сохраняет длины или углы. В качестве конкретного примера такого отображения рассмотрим обычные сферические координаты $\theta\equiv x^1$, $\varphi\equiv x^2$. На первый взгляд может показаться, что вся сфера отображается на прямоугольник $0\leqslant x^1\leqslant\pi$, $0\leqslant x^2\leqslant 2\pi$ (рис. 2.5). Однако при более внимательном рассмотрении видно, что здесь что-то не так. Во-первых, отображение