по определению, лежать в некоторой области рассмотренного вида, то мы доказали, что TM является многообразием. Ясно, что эта конструкция легко переносится на касательные расслоения для многомерных многообразий. Координаты типа описанных выше, где координаты для T_P определяются координатами на M в окрестности P при помощи разложения вектора по базису (2.4), называются *естественными* координатами для TM.

Далее, кривая в рассматриваемом расслоенном пространстве, изображённая штриховой линией на рис. 2.12, задаёт

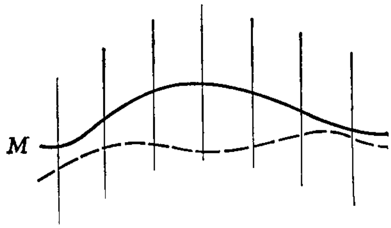

Рис. 2.12. Сечение (штриховая линия) расслоенного пространства TM над одномерным многообразием M (жирная линия).

некоторый вектор в каждой точке из M, поэтому такая кривая определяет векторное поле на M. Такая кривая называется *сечением* TM. Ясно, что, вообще говоря, не имеет никакого смысла говорить о длине такой кривой, так что мы имеем здесь пример многообразия, для которого не приходится утруждать себя определением в нём метрики.

В общем случае расслоенное пространство состоит из многообразия, называемого *базой* (в разобранном случае это была кривая M), и *слоя*, заданного для каждой точки базы. Если база n-мерна, а каждый слой m-мерен, то размерность расслоенного пространства равна $m+n$. Это многообразия особого рода, обладающие свойством разложимости на слои: точки одного слоя связаны друг с другом, а точки разных слоёв нет. Эта ситуация формализуется введением понятия *проекции* π, отображающей каждую точку слоя в ту точку базы, к которой «подвязан» данный слой. На произвольном многообразии такой проекции определить нельзя. В следующем параграфе мы приведём много примеров многообразий, являющихся расслоенными пространствами.

2.10. ПРИМЕРЫ РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

(i) Рассмотренное выше расслоенное пространство TM, состоящее из многообразия и его касательных пространств, называется *касательным расслоением* (или *касательным пучком*). *Это* — один из важнейших для физики примеров абстрактных многообразий. Для n-мерного многообразия M расслоение TM имеет размерность $2n$.

(ii) Дальше в этой главе мы перейдём от случая векторных полей к более общему случаю тензорных полей. Каждому типу тензоров отвечают соответствующие расслоения над гладкими многообразиями.

(iii) Слои не обязаны быть связанными с гладкой структурой на базе. Рассмотрим «внутренние» степени свободы, описывающие состояние элементарной частицы, такие как изоспин. Расслоение, слои которого являются изоспиновыми пространствами, а база — пространством-временем, может описывать как положение (x, y, z, t) частицы в пространстве-времени, так и её внутреннее состояние (изоспин).

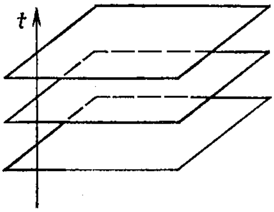

Рис. 2.13. Естественная структура расслоения ньютонова (галилеева) пространства-времени, слои которого определяются фиксацией единого мирового времени.

(iv) С точки зрения ньютоновой физики пространство-время естественно наделено структурой расслоенного пространства. Для Ньютона и Галилея время было абсолютным: каждый может определить, являются два данных события одновременными или нет, независимо от того, где они происходят. Мы можем, следовательно, построить расслоение, базой которого является R^1 (время), а слоем — R^3 (пространство). Это изображено на рис. 2.13. Между точками различных слоёв (точками пространства в разные моменты времени) нет никакой естественной связи, поскольку в ньютоновой физике нет абсолютного пространства: два различных наблюдателя, движущихся друг относительно друга, имеют различные точки зрения на то, какие точки пространства являются *неподвижными*. Поэтому естественной структуры расслоения с базой R^3 нет, а есть только расслоение с базой R^1. Один из эффектов эйнштейновской теории относительности — разрушение этой структуры расслоения и замена её другой структурой — метрической (см. § 2.31 ниже).

2.11. БОЛЕЕ ГЛУБОКИЙ ВЗГЛЯД НА РАССЛОЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В теории расслоенных пространств имеются два связанных друг с другом аспекта, которые нам предстоит рассмотреть, с тем чтобы по-настоящему оценить богатство и полезность понятия расслоения. Это их глобальные свойства и применение групп для их построения.