страктных многообразий. Для n-мерного многообразия M расслоение TM имеет размерность $2n$.

(ii) Дальше в этой главе мы перейдём от случая векторных полей к более общему случаю тензорных полей. Каждому типу тензоров отвечают соответствующие расслоения над гладкими многообразиями.

(iii) Слои не обязаны быть связанными с гладкой структурой на базе. Рассмотрим «внутренние» степени свободы, описывающие состояние элементарной частицы, такие как изоспин. Расслоение, слои которого являются изоспиновыми пространствами, а база — пространством-временем, может описывать как положение (x, y, z, t) частицы в пространстве-времени, так и её внутреннее состояние (изоспин).

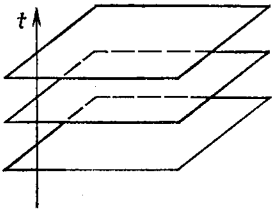

Рис. 2.13. Естественная структура расслоения ньютонова (галилеева) пространства-времени, слои которого определяются фиксацией единого мирового времени.

(iv) С точки зрения ньютоновой физики пространство-время естественно наделено структурой расслоенного пространства. Для Ньютона и Галилея время было абсолютным: каждый может определить, являются два данных события одновременными или нет, независимо от того, где они происходят. Мы можем, следовательно, построить расслоение, базой которого является R^1 (время), а слоем — R^3 (пространство). Это изображено на рис. 2.13. Между точками различных слоёв (точками пространства в разные моменты времени) нет никакой естественной связи, поскольку в ньютоновой физике нет абсолютного пространства: два различных наблюдателя, движущихся друг относительно друга, имеют различные точки зрения на то, какие точки пространства являются *неподвижными*. Поэтому естественной структуры расслоения с базой R^3 нет, а есть только расслоение с базой R^1. Один из эффектов эйнштейновской теории относительности — разрушение этой структуры расслоения и замена её другой структурой — метрической (см. § 2.31 ниже).

2.11. БОЛЕЕ ГЛУБОКИЙ ВЗГЛЯД НА РАССЛОЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В теории расслоенных пространств имеются два связанных друг с другом аспекта, которые нам предстоит рассмотреть, с тем чтобы по-настоящему оценить богатство и полезность понятия расслоения. Это их глобальные свойства и применение групп для их построения.

Чтобы лучше разобраться с глобальными свойствами расслоенных пространств, определим сперва более простое понятие *прямого произведения*. Любым двум пространствам M и N можно сопоставить их прямое (декартово) произведение $M \times N$, состоящее из всех упорядоченных пар (a, b) с a из M и b из N. Например, R^2 есть прямое произведение $R^1 \times R^1$. Если M и N — многообразия, то $M \times N$ также, очевидно, будет многообразием: координаты $\{x^i,\ i = 1, \ldots, m\}$ для открытой области U в M вместе с координатами $\{y^i,\ i = 1, \ldots, n\}$ для открытой области V в N дают набор $m + n$ координат для открытой области $U \times V$ в $M \times N$. Из приведённой выше конструкции расслоенных пространств ясно, что по крайней мере локально они являются прямыми произведениями вида $U \times F$, где U — открытое множество базы B, а F представляет собой типичный слой (все слои тождественны F). На самом деле это свойство — часть определения расслоенного пространства; оно называется *локальной тривиальностью* расслоения (расслоение сводится к прямому произведению, если ограничиться рассмотрением достаточно малой области базы B). Интересен вопрос, является ли данное расслоение *глобально тривиальным*, т. е. может ли всё пространство расслоения в целом быть представлено в виде прямого произведения $B \times F$.

Обычно ответ оказывается отрицательным; мы приведём два примера, иллюстрирующих и смысл вопроса, и смысл ответа.

(i) Рассмотрим TS^2, касательное расслоение для двумерной сферы S^2. Если бы оно было глобально тривиальным, то существовало бы C^∞-отображение (диффеоморфизм) TS^2 на $S^2 \times R^2$, ибо типичным слоем является R^2, касательная плоскость. Рассмотрим множество точек в $S^2 \times R^2$ вида $(P, \bar{V})$, где P — произвольная точка из S^2, а $\bar{V}$ — некоторый *фиксированный* вектор из R^2. Тогда прообраз этого множества дал бы ненулевое *сечение* TS^2, т. е. C^∞-векторное поле на S^2, нигде не обращающееся в нуль. Но такого поля на S^2 *нет*. Это — следствие знаменитой (и трудной) *теоремы о неподвижной точке на сфере*, согласно которой любое 1-1-отображение (диффеоморфизм) S^2 на себя имеет на S^2 по крайней мере одну неподвижную точку. Нигде не обращающееся в нуль векторное поле давало бы отображение без неподвижных точек, как будет объяснено ниже в § 3.1. Поэтому TS^2 в целом не является прямым произведением. Это пример, в котором расслоение нетривиально в силу свойств топологии базы (S^2).

(ii) Наш второй пример показывает, что нетривиальное расслоение можно построить даже на базе, допускающей тривиальное расслоение. Рассмотрим TS^1, касательное расслоение для окружности S^1. В отличие от S^2 окружность допускает непрерывное нигде не обращающееся в нуль векторное поле, и TS^1 является прямым произведением $S^1 \times R$, как видно из рис. 2.14. Это просто глобальный вариант локальной картинки, изображенной на рис. 2.11 (b). Представим теперь,

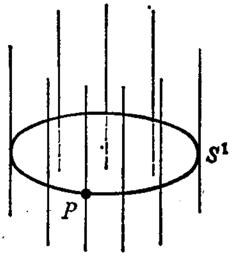

Рис. 2.14. Расслоение TS^1 тривиально — представимо в виде прямого произведения окружности S^1 на типичный слой R^1 (нарисованный вертикально). Ср. с рис. 2.11 (b).

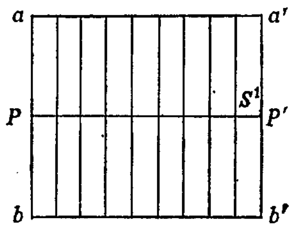

Рис. 2.15. Расслоение TS^1, разрезанное вдоль одного слоя и развёрнутое на плоскость. Слои простираются бесконечно далеко вверх и вниз.

что мы разрезали окружность в точке P на рис. 2.14 и «развернули» расслоение на плоскость, как показано на рис. 2.15. Чтобы по рис. 2.15 восстановить рис. 2.14, нужно просто отождествить точку a с точкой a', P с P', b с b' и т. д. Но мы можем «склеить» расслоение по-другому и получить лист Мёбиуса: отождествляем a с b', P с P', b с a' и т. д. Такая склейка закручивает нашу полоску, которая теперь будет выглядеть, примерно как на рис. 2.16. Локально она по-прежнему устроена, как на рис. 2.11 (b); действительно, расслоение над каждым связным открытым собственным подмножеством в S^1 («собственным» означает «не совпадающим с S^1») допускает непрерывное 1-1-отображение на некоторую часть рис. 2.14. Обойдя лист Мёбиуса вокруг, мы убеждаемся, что не существует *непрерывного* 1-1-отображения всего первого расслоения на второе. Поэтому лист Мёбиуса не является прямым произведением, и второе расслоение нетривиально. Конструкции нетривиальных расслоений используются в современной физике

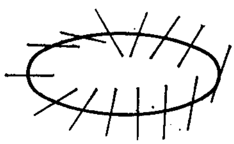

Рис. 2.16. Вариант расслоения с теми же базой и слоем, что и у TS^1, отвечающий листу Мёбиуса; слой переворачивается «вверх ногами» при обходе окружности. Локально здесь всё устроено так же, как и на рис. 2.11 (b).

элементарных частиц для определения так называемых «инстантонов».

Пример листа Мёбиуса весьма поучителен: из него видно, что недостаточно просто указать базу и слой, для того чтобы задать расслоение, поскольку расслоение может определяться своими базой и слоем неоднозначно. Требуется более точное определение расслоения, и здесь на помощь приходят группы. Различие между двумя указанными выше расслоениями над S^1 — в так называемой *структурной группе* расслоения. Чтобы сформулировать полное определение расслоенного пространства в компактном виде, нам потребуется понятие *гомеоморфизма*; это просто 1-1-отображение одного пространства на другое, непрерывное и имеющее непрерывное обратное[1]. (По поводу терминологии теории отображений см. § 1.2.) Мы определяем *расслоенное пространство* как пространство E, для которого заданы следующие объекты: многообразие B, называемое *базой*, *проекция* π: $E \to B$, типичный *слой* F, *структурная группа* G гомеоморфизмов F на себя и семейство $\{U_j\}$ открытых множеств, покрывающее B (т. е. семейство открытых множеств, объединение которых есть B), причём должны выполняться следующие требования.

(i) Локально расслоение является тривиальным; это означает, что расслоение над каждым множеством U_j (т. е. $\pi^{-1}(U_j)$) допускает гомеоморфизм на прямое произведение $U_j \times F$. Мы уже говорили об этом выше. Частью этого гомеоморфизма является гомеоморфизм каждого слоя $\pi^{-1}(x)$, где x — элемент базы B, на F. Обозначим его через $h_j(x)$, указывая тем самым не только точку x, над которой «висит» слой, но также и индекс j, нумерующий окрестность U_j, содержащую x.

(ii) Если точка x содержится в области перекрытия окрестностей U_j и U_k, то возникают два гомеоморфизма $h_j(x)$ и $h_k(x)$ слоя над точкой x на F. Поскольку гомеоморфизмы обратимы, отображение $h_j(x) \circ h_k^{-1}(x)$ является гомеоморфизмом F на F. Требуется, чтобы он принадлежал структурной группе G.

Последнее требование содержит информацию о глобальной структуре расслоенного пространства. Чтобы увидеть, как это работает, дадим полное определение расслоения TS^1 (допускающее непосредственное обобщение на случай расслоения TM для любого M). Расслоение $F = TS^1$ имеет базу $B = S^1$, типичный слой $F = R^1$ и проекцию π: $(x, \bar{v}) \mapsto x$, где x — точка из S^1 и $\bar{v}$ — вектор из T_x. В качестве открытого

[1] Гомеоморфизм — это диффеоморфизм без требований дифференцируемости. Для большинства физически интересных расслоений можно все гомеоморфизмы считать диффеоморфизмами.

покрытия $\{U_j\}$ можно взять любой атлас на S^1. Типичное семейство $\{U_j\}$ изображено на рис. 2.17. Каждое U_j имеет «систему» координат, т. е. параметризацию S^1, которую мы обозначим через λ_j. Вектор $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda_j$ в точке x из U_j является базисом для T_x, так что каждый вектор $\bar{v}$ из T_x представляется в виде $\alpha_{(j)}\,\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda_j$ для некоторого фиксированного j, где $\alpha_{(j)}$ — вещественное число. Это не что иное, как соотношение (2.4). Гомеоморфизмы слоя T_x на R, входящие в определение TS^1, пусть *по определению* имеют вид $h_j(x)\colon \bar{v} \mapsto \alpha_{(j)}$. Если x содержится в двух окрестностях U_j и U_k, то имеются два таких гомеоморфизма T_x на R, и, поскольку λ_j и λ_k никак не связаны между собой, $\alpha_{(j)}$ и $\alpha_{(k)}$ могут быть двумя любыми ненулевыми вещественными числами. Гомеоморфизм $h_j(x) \circ h_k^{-1}(x)\colon F \to F$ действует так: $\alpha_{(k)} \mapsto \alpha_{(j)}$ и, значит, является умножением на число $r_{jk} = \alpha_{(j)}/\alpha_k$. Поскольку r_{jk} может быть любым ненулевым вещественным числом, структурной группой здесь служит $R^1 \setminus \{0\}$ — группа относительно умножения (фактически группа Ли). Отметим, что для общего n-мерного многообразия M структурная группа расслоения TM есть совокупность всех $n \times n$-матриц с ненулевым определителем; эта группа обозначается через $GL(n, R)$. Мы изучим её свойства в гл. 3.

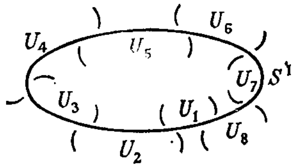

Рис. 2.17. Совокупность открытых множеств в S^1, покрывающая S^1. Границы этих множеств указаны скобками. Множество U_1 имеет перекрытие с U_2, U_2 с U_3 и так далее вплоть до U_8, имеющего перекрытие с U_1.

Итак, TS^1 определено. Но как оно выглядит? Можно выбрать координаты λ_j таким образом, что любые две из них, скажем λ_j и λ_k, возрастали на общей части окрестностей U_j и U_k в одном направлении. (Мы выражаем этот факт, говоря, что S^1 *ориентируемо*, см. § 4.7.) При таком выборе координатных окрестностей все «числа перекрытия» r_{jk} будут, как легко видеть, положительными, и структурная группа сведётся к R^+, группе положительных вещественных чисел по умножению. Более того, можно добиться, чтобы $\mathrm{d}\lambda_j/\mathrm{d}\lambda_k = 1$ в каждой области перекрытия. Тогда группа сведётся просто к 1 — к одному единичному элементу. Последняя структурная группа тривиальна, тривиальна и структура расслоения. Это и есть расслоение, изображённое на рис. 2.14.

Для того чтобы описать структуру листа Мёбиуса, нужно использовать другие отображения $h_j(x)$, причём следует быть внимательным, чтобы не «перепутать» это расслоение с касательным. Простейшая возможность — воспользоваться семейством $\{U_j,\ j = 1, \ldots, 8\}$, изображённым на рис. 2.17, и положить $r_{12} = 1$, $r_{23} = 1$, ..., $r_{78} = 1$. Но теперь закрученность листа Мёбиуса вынуждает нас положить $r_{81} = -1$. Структурная группа состоит из двух элементов $\{1, -1\}$ с умножением в качестве групповой операции. Можно выбрать числа r_{jk} и по-другому, но уменьшить структурную группу невозможно.

Касательное расслоение TS^1 имеет своей структурной группой $R^1 \setminus \{0\}$ — почти что типичный слой. *Расслоение реперов* на произвольном многообразии M — это расслоение, у которого та же структурная группа, что и у TM, а слоем является множество всех *базисов* в касательном пространстве (т. е. в R^n). Для одномерного многообразия типа S^1 это есть множество всех ненулевых векторов, совпадающее с $R^1 \setminus \{0\}$. Так что слои расслоения реперов на S^1 гомеоморфны его структурной группе; это верно для всех расслоений реперов. Такие расслоения называются *главными расслоенными пространствами.*

2.12. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

Как было определено в § 2.7, *векторное поле* — это правило, задающее вектор в каждой точке многообразия M. В каждой точке — своё касательное пространство, так что векторное поле «выбирает» по одному вектору из каждого такого пространства. Далее, для каждой кривой в каждой её точке определён касательный вектор, и возникает естественный вопрос, нельзя ли, обратно, для заданного векторного поля найти кривую, начинающуюся в заданной точке P, касательный вектор к которой в каждой её точке принадлежит векторному полю? Для векторных полей класса C^1 ответ положителен; такие кривые называются *интегральными кривыми* векторного поля. Доказательство состоит в следующем. Пусть $V^i(P)$ — компоненты рассматриваемого векторного поля (это функции от P). В некоторой координатной системе $\{x^i\}$ мы имеем $V^i(P) = v^i(x^j)$. То что это поле касается кривой с параметром λ, означает, что

$$\frac{dx^i}{d\lambda} = v^i(x^j). \qquad (2.5)$$

Мы получаем для $x^i(\lambda)$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, у которой всегда существует единственное решение в некоторой окрестности начальной точки P. (Теорема существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений доказана в большинстве руководств по дифференциальным уравнениям, например в книге Choquet-Bruhat, DeWitt-Morette & Dillard — Bleick (1977) (см. библиографию в конце главы). Два примера векторных полей представлены на рис. 2.18.