листа Мёбиуса вынуждает нас положить $r_{81} = -1$. Структурная группа состоит из двух элементов $\{1, -1\}$ с умножением в качестве групповой операции. Можно выбрать числа r_{jk} и по-другому, но уменьшить структурную группу невозможно.

Касательное расслоение TS^1 имеет своей структурной группой $R^1 \setminus \{0\}$ — почти что типичный слой. *Расслоение реперов* на произвольном многообразии M — это расслоение, у которого та же структурная группа, что и у TM, а слоем является множество всех *базисов* в касательном пространстве (т. е. в R^n). Для одномерного многообразия типа S^1 это есть множество всех ненулевых векторов, совпадающее с $R^1 \setminus \{0\}$. Так что слои расслоения реперов на S^1 гомеоморфны его структурной группе; это верно для всех расслоений реперов. Такие расслоения называются *главными расслоенными пространствами.*

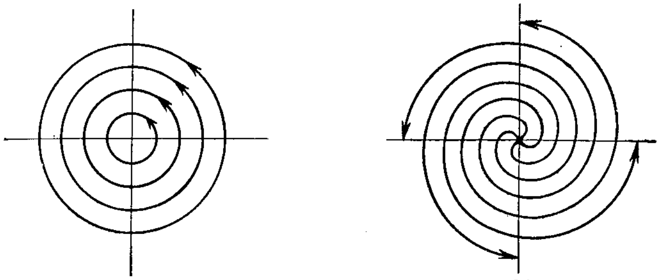
2.12. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

Как было определено в § 2.7, *векторное поле* — это правило, задающее вектор в каждой точке многообразия M. В каждой точке — своё касательное пространство, так что векторное поле «выбирает» по одному вектору из каждого такого пространства. Далее, для каждой кривой в каждой её точке определён касательный вектор, и возникает естественный вопрос, нельзя ли, обратно, для заданного векторного поля найти кривую, начинающуюся в заданной точке P, касательный вектор к которой в каждой её точке принадлежит векторному полю? Для векторных полей класса C^1 ответ положителен; такие кривые называются *интегральными кривыми* векторного поля. Доказательство состоит в следующем. Пусть $V^i(P)$ — компоненты рассматриваемого векторного поля (это функции от P). В некоторой координатной системе $\{x^i\}$ мы имеем $V^i(P) = v^i(x^j)$. То что это поле касается кривой с параметром λ, означает, что

$$\frac{dx^i}{d\lambda} = v^i(x^j). \qquad (2.5)$$

Мы получаем для $x^i(\lambda)$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, у которой всегда существует единственное решение в некоторой окрестности начальной точки P. (Теорема существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений доказана в большинстве руководств по дифференциальным уравнениям, например в книге Choquet-Bruhat, DeWitt-Morette & Dillard — Bleick (1977) (см. библиографию в конце главы). Два примера векторных полей представлены на рис. 2.18.

Отметим, что различные интегральные кривые могут пересекаться лишь в таких точках, где $V^i = 0$ для всех i, в силу единственности решения для системы (2.5). Поскольку через каждую точку P проходит некоторая интегральная кривая (она получается решением системы (2.5) с начальным условием в точке P), интегральные кривые «заполняют» всё M. Например, если M трёхмерно, то на нём любое векторное поле



(a) (b)

Рис. 2.18. Интегральные кривые для двух векторных полей на R^2: (a) $V = x\partial/\partial y - y\partial/\partial x$; (b) $V = (x + y/r)\partial/\partial y - (y - x/r)\partial/\partial x$, где $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

задает двумерное семейство интегральных кривых, покрывающих всё M (за исключением, быть может, точек, где $V^i = 0$ для всех i). Такое заполняющее многообразие множество кривых называется *конгруэнцией*. Отметим, между прочим, что это множество кривых обычно само можно рассматривать как многообразие.

2.13. ЭКСПОНЕНТА ОТ ОПЕРАТОРА d/dλ

Введём понятие, которое окажется полезным для последующих вычислений. Пусть задано *аналитическое* многообразие (класса C^ω), и пусть координаты $x^i(\lambda)$ точек каждой из интегральных кривых поля $\bar{Y} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ являются аналитическими функциями от λ. Тогда координаты точек, отвечающих значениям параметра λ_0 и $\lambda_0 + \varepsilon$, связаны между собой при помощи ряда Тэйлора:

$$x^i(\lambda_0 + \varepsilon) = x^i(\lambda_0) + \varepsilon\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\right)_{\lambda_0} + \frac{1}{2!}\varepsilon^2\left(\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\lambda^2}\right) + \ldots$$
$$= \left(1 + \varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2} + \ldots\right)x^i\Big|_{\lambda_0} = \exp\left[\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right]x^i\Big|_{\lambda_0}, \quad (2.6)$$

где обозначение с «exp» является очевидным и удобным сокращением для «дифференциального оператора», который, будучи применен к $x^i(\lambda)$, даёт, после подстановки $\lambda = \lambda_0$, ряд