Отметим, что различные интегральные кривые могут пересекаться лишь в таких точках, где $V^i = 0$ для всех i, в силу единственности решения для системы (2.5). Поскольку через каждую точку P проходит некоторая интегральная кривая (она получается решением системы (2.5) с начальным условием в точке P), интегральные кривые «заполняют» всё M. Например, если M трёхмерно, то на нём любое векторное поле

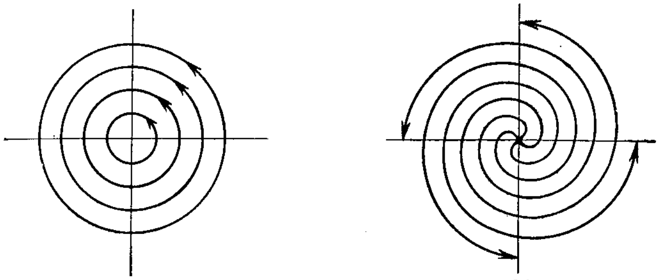

Рис. 2.18. Интегральные кривые для двух векторных полей на R^2: (a) $V = x\partial/\partial y - y\partial/\partial x$; (b) $V = (x + y/r)\partial/\partial y - (y - x/r)\partial/\partial x$, где $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

задает двумерное семейство интегральных кривых, покрывающих всё M (за исключением, быть может, точек, где $V^i = 0$ для всех i). Такое заполняющее многообразие множество кривых называется *конгруэнцией*. Отметим, между прочим, что это множество кривых обычно само можно рассматривать как многообразие.

2.13. ЭКСПОНЕНТА ОТ ОПЕРАТОРА d/dλ

Введём понятие, которое окажется полезным для последующих вычислений. Пусть задано *аналитическое* многообразие (класса C^ω), и пусть координаты $x^i(\lambda)$ точек каждой из интегральных кривых поля $\bar{Y} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ являются аналитическими функциями от λ. Тогда координаты точек, отвечающих значениям параметра λ_0 и $\lambda_0 + \varepsilon$, связаны между собой при помощи ряда Тэйлора:

$$x^i(\lambda_0 + \varepsilon) = x^i(\lambda_0) + \varepsilon\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\right)_{\lambda_0} + \frac{1}{2!}\varepsilon^2\left(\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\lambda^2}\right) + \ldots$$
$$= \left(1 + \varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2} + \ldots\right)x^i\Big|_{\lambda_0} = \exp\left[\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right]x^i\Big|_{\lambda_0}, \quad (2.6)$$

где обозначение с «exp» является очевидным и удобным сокращением для «дифференциального оператора», который, будучи применен к $x^i(\lambda)$, даёт, после подстановки $\lambda = \lambda_0$, ряд

Тэйлора. Этот оператор называется *экспонентой от оператора* $\varepsilon \mathrm{d}/d\lambda$. Оператор $\varepsilon \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ представляет бесконечно малое движение вдоль интегральной кривой, а его экспонента даёт конечное движение. Мы будем использовать на равных обозначения

$$\exp(\varepsilon \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda) = e^{\varepsilon \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda} = e^{\varepsilon \bar{V}}.$$

2.14. СКОБКИ ЛИ И НЕКООРДИНАТНЫЕ БАЗИСЫ

Если задана какая-нибудь координатная система x^i, то часто бывает удобно выбирать $\{\partial/\partial x^i\}$ в качестве базисных векторных полей. Однако в качестве базиса можно брать *любое* линейно-независимое семейство векторных полей: нетрудно понять, что не все они происходят из каких-либо систем координат. Дело в том, что операторы $\partial/\partial x^i$ и $\partial/\partial x^j$ *коммутируют* при всех i, j, а два произвольных векторных поля, вообще говоря, не коммутируют: если $\bar{V} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ и $\bar{W} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$, то

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} &= \sum_{i,j} V^i \frac{\partial}{\partial x^i} W^j \frac{\partial}{\partial x^j} - W^j \frac{\partial}{\partial x^j} V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \sum_{i,j} V^i W^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\
&+ \sum_{i,j} V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - \sum_{i,j} W^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \sum_{i,j}\left(V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} - W^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

(последняя строчка получается из предпоследней переобозначением индексов суммирования во второй сумме предпоследней строчки). Таким образом,

$$\blacklozenge \quad \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\right] \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \tag{2.8}$$

является *векторным полем*, вообще говоря ненулевым. Если $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ и $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$ служат элементами некоторого базиса, то их нельзя представить в виде дифференцирований по каким-либо координатам. Такой базис является некоординатным.

Важно уяснить себе, что это различие между координатным и некоординатным базисами проявляется, лишь если рассматривать некоторую область многообразия, а не одну отдельную точку. Оно определяется *производными* от компонент векторов, а не только значениями в данной точке. Таким образом, различие в свойствах координатных и некоординат-