Тэйлора. Этот оператор называется *экспонентой от оператора* $\varepsilon d/d\lambda$. Оператор $\varepsilon d/d\lambda$ представляет бесконечно малое движение вдоль интегральной кривой, а его экспонента даёт конечное движение. Мы будем использовать на равных обозначения

$$\exp(\varepsilon d/d\lambda) = e^{\varepsilon d/d\lambda} = e^{\varepsilon \bar{V}}.$$

2.14. СКОБКИ ЛИ И НЕКООРДИНАТНЫЕ БАЗИСЫ

Если задана какая-нибудь координатная система x^i, то часто бывает удобно выбирать $\{\partial/\partial x^i\}$ в качестве базисных векторных полей. Однако в качестве базиса можно брать *любое* линейно-независимое семейство векторных полей: нетрудно понять, что не все они происходят из каких-либо систем координат. Дело в том, что операторы $\partial/\partial x^i$ и $\partial/\partial x^j$ *коммутируют* при всех i, j, а два произвольных векторных поля, вообще говоря, не коммутируют: если $\bar{V} = d/d\lambda$ и $\bar{W} = d/d\mu$, то

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\mu} - \frac{d}{d\mu}\frac{d}{d\lambda} &= \sum_{i,j} V^i \frac{\partial}{\partial x^i} W^j \frac{\partial}{\partial x^j} - W^j \frac{\partial}{\partial x^j} V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i,j} V^i W^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &+ \sum_{i,j} V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - \sum_{i,j} W^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i,j}\left(V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} - W^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\end{aligned} \tag{2.7}$$

(последняя строчка получается из предпоследней переобозначением индексов суммирования во второй сумме предпоследней строчки). Таким образом,

$$\blacklozenge \quad \left[\frac{d}{d\lambda}, \frac{d}{d\mu}\right] \equiv \frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\mu} - \frac{d}{d\mu}\frac{d}{d\lambda} \tag{2.8}$$

является *векторным полем*, вообще говоря ненулевым. Если $d/d\lambda$ и $d/d\mu$ служат элементами некоторого базиса, то их нельзя представить в виде дифференцирований по каким-либо координатам. Такой базис является некоординатным.

Важно уяснить себе, что это различие между координатным и некоординатным базисами проявляется, лишь если рассматривать некоторую область многообразия, а не одну отдельную точку. Оно определяется *производными* от компонент векторов, а не только значениями в данной точке. Таким образом, различие в свойствах координатных и некоординатных базисов имеет значение, только когда мы имеем дело с областями многообразия, и несущественно в задачах, где рассматривается лишь касательное пространство T_P в одной точке P.

Упражнение 2.1. Показать, что «единичные» базисные векторные поля для полярных координат на эвклидовой плоскости, определяемые формулами

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\hat{\mathbf{y}},$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\hat{\mathbf{y}},$$

где $\hat{\mathbf{x}} = \partial/\partial x$ и $\hat{\mathbf{y}} = \partial/\partial y$, образуют некоординатный базис.

Коммутатор $[d/d\lambda, d/d\mu]$ называется *скобкой Ли*[1] полей $\bar{V}$ и $\bar{W}$. Дадим её геометрическую интерпретацию.

На рис. 2.19 изображена типичная координатная сетка на двумерном многообразии. Заметим, что по определению x^1 постоянно вдоль линий x^2, являющихся интегральными кривыми поля $\partial/\partial x^2$. Именно поэтому поля $\partial/\partial x^1$ и $\partial/\partial x^2$ и коммутируют: каждое из них является дифференцированием вдоль линий, на которых другая координата фиксирована. Рассмотрим теперь два произвольных векторных поля $\bar{V} = d/d\lambda$ и $\bar{W} = d/d\mu$, интегральные кривые которых изображены на рис. 2.20. Интегральная кривая поля $\bar{W}$ не обязательно будет кривой, на которой λ постоянно, и наоборот. Дифференцирование $d/d\mu$ не является дифференцированием при постоянном λ, поэтому $d/d\lambda$ и $d/d\mu$ не коммутируют. Хотя кривые полей $\bar{V}$ и $\bar{W}$ выглядят как координатные, их *параметризация* не такая, как в координатной системе. И даже то, что они *выглядят* как координатные, есть лишь специфика размерности два: в трёхмерной ситуации может случиться, что кривая (1) пересекает кривые (α) и (β), а кривая (2) пересекает только (α).

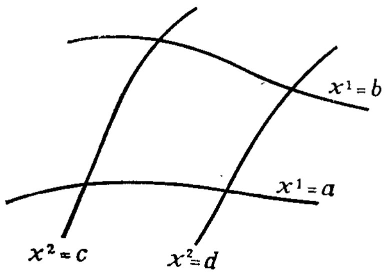

Рис. 2.19. Типичная координатная сетка на двумерном многообразии.

---

[1] И скобки Ли, и группы Ли обязаны своим названием одному и тому же человеку — Софусу Ли, великому математику конца 19-го века. Скобки Ли, как будет видно дальше, являются частным случаем производных Ли. Читатель, знакомый с теорией групп Ли, узнает в определении скобки Ли определение коммутатора векторных полей $d/d\lambda$ и $d/d\mu$, являющихся генераторами некоторой группы Ли преобразований. Мы обсудим эту связь в гл. 3.

Для вектора $[\bar{V}, \bar{W}]$ можно дать геометрическую картинку (рис. 2.21). Отправляясь от точки P, сдвинемся на $\Delta\lambda = \varepsilon$ вдоль интегральной кривой поля V, проходящей через P; затем сдвинемся на $\Delta\mu = \varepsilon$ вдоль интегральной кривой поля W.

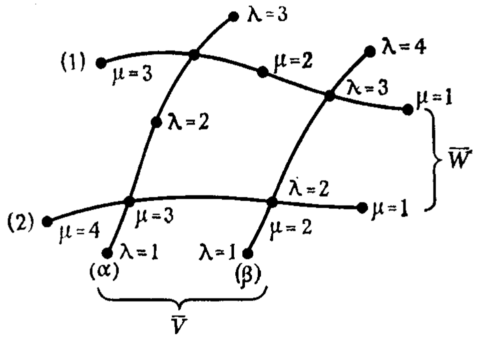

Рис. 2.20. Типичные интегральные кривые для двух векторных полей на двумерном многообразии.

Пусть мы попадём в точку A. Начиная снова из точки P и сдвигаясь сначала на $\Delta\mu = \varepsilon$, а затем на $\Delta\lambda = \varepsilon$, мы придём

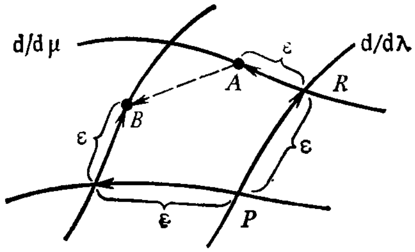

Рис. 2.21. Геометрическая интерпретация скобки Ли $[\bar{V}, \bar{W}]$ как "меры незамкнутости" параллелограмма, стороны которого отвечают равным приращениям параметров вдоль интегральных кривых полей $\bar{V}$ и $\bar{W}$.

в некоторую точку $B \neq A$. Покажем, что вектор, идущий из A в B, есть $\varepsilon^2[\bar{V}, \bar{W}]$ с точностью до членов более высокого порядка по ε.

Удобнее всего использовать введённый выше экспоненциальный оператор. Ясно, что

$$x^i(R) = \exp\left[\varepsilon \frac{d}{d\lambda}\right] x^i \Big|_P,$$

$$x^i(A) = \exp\left[\varepsilon \frac{d}{d\mu}\right] \exp\left[\varepsilon \frac{d}{d\lambda}\right] x^i \Big|_P. \tag{2.9}$$

Аналогично путь, идущий в точку B из точки P, даёт

$$x^i(B) = \exp\left[\varepsilon \frac{d}{d\lambda}\right] \exp\left[\varepsilon \frac{d}{d\mu}\right] x^i \Big|_P. \tag{2.10}$$

Поэтому разность координат точек A и B равна

$$x^i(B)-x^i(A)=[\mathrm{e}^{\varepsilon \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda}, \mathrm{e}^{\varepsilon \mathrm{d}/\mathrm{d}\mu}]x^i|_P; \tag{2.11}$$

справа стоит в точности коммутатор экспоненциальных операторов. Переходя к разложениям Тэйлора, получаем

$$\begin{aligned}[e^{\varepsilon \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda}, e^{\varepsilon \mathrm{d}/\mathrm{d}\mu}] &= \Big[1+\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}+O(\varepsilon^3),\\ &\qquad 1+\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\mu^2}+O(\varepsilon^3)\Big]\\ &=\varepsilon^2\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\right]+O(\varepsilon^3),\end{aligned}$$

т. е.

$$x^i(B)-x^i(A)=\varepsilon^2[\bar{V}, \bar{W}]x^i|_P+O(\varepsilon^3). \tag{2.12}$$

Это — i-я компонента скобки Ли: равенство (2.12) подтверждает справедливость нашей геометрической картинки для скобки Ли.

Упражнение 2.2. (a) Используя равенство (2.6), докажите формулу (2.12).

(b) Докажите, что

$$\exp[a\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda+b\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu]=\exp[a\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda]\exp[b\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu] \tag{2.13}$$

при всех a и b, если и только если $[\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda, \mathrm{d}/\mathrm{d}\mu]=0$.

Упражнение 2.3. Докажите, что любые три дважды дифференцируемые (т. е. класса C^2) векторные поля $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ удовлетворяют *тождеству Якоби*

$$[[\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z}]+[[\bar{Y}, \bar{Z}], \bar{X}]+[[\bar{Z}, \bar{X}], \bar{Y}]=0. \tag{2.14}$$

Алгеброй Ли векторных полей в области U многообразия M называется всякая совокупность A векторных полей на U, являющаяся векторным пространством относительно сложения (это значит, что любая линейная комбинация *с постоянными коэффициентами* полей из A снова есть поле из A) и замкнутая относительно операции коммутирования (скобка Ли двух полей из A снова есть поле из A). Ясно, что совокупность всех векторных полей класса C^∞ на U является алгеброй Ли: гораздо интереснее, однако, когда выделенная по той или иной причине меньшая совокупность векторных полей тоже образует алгебру Ли. Такие совокупности тесно связаны со свойствами симметрии многообразия и с соответствующими группами симметрии, которые обычно являются группами Ли. Мы изучим их более подробно в гл. 3, где будет также дано более общее определение алгебры Ли.