2.15. КОГДА БАЗИС ЯВЛЯЕТСЯ КООРДИНАТНЫМ?

Пусть даны два векторных поля $\bar{A} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ и $\bar{B} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$ на двумерном многообразии M; предположим, что $\bar{A}$ и $\bar{B}$ линейно-независимы в каждой точке некоторого открытого множества U из M, так что они образуют там базис векторных полей. В каком случае можно быть уверенным, что этот базис является координатным, другими словами, что λ и μ являются координатами на U? Очевидно, необходимо, чтобы наши поля коммутировали:

$$[\bar{A}, \bar{B}] = 0.$$

Покажем, что это условие является также и достаточным. Для этого обратимся непосредственно к определению многообразия — построим соответствующее 1-1-отображение из U

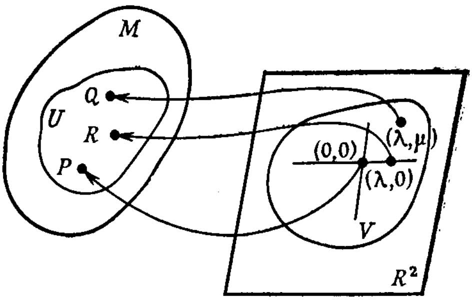

Рис. 2.22. Описанное в тексте отображение из R^2 в M. Оно задаёт систему координат в некоторой окрестности точки P.

на некоторое открытое множество в R^2. Отправляясь от некоторой точки P из U и используя произвольные координаты (x^1, x^2) в U, сместимся вдоль поля $\bar{A}$ на «параметрическое расстояние» λ_1; мы попадём в точку R с координатами (см. (2.6))

$$x^i(R) = \mathrm{e}^{\lambda_1\, \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda} x^i \big|_P.$$

Если мы сначала сместимся на расстояние λ_1 вдоль $\bar{A}$, а затем на μ_1 вдоль $\bar{B}$, то попадём в точку Q с координатами

$$x^i(Q) = \mathrm{e}^{\mu_1\, \mathrm{d}/\mathrm{d}\mu} \mathrm{e}^{\lambda_1\, \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda} x^i \big|_P.$$

Эта формула определяет отображение экспоненциального типа из некоторой окрестности V начала координат в R^2 в U; данный элемент из V — пара (λ_1, μ_1) — отображается в точку Q. Это отображение изображено на рис. 2.22. Для того чтобы оно определяло координатную систему, оно должно быть взаимно-однозначным, т. е. должно иметь обратное. Ниже мы докажем, что обратное отображение на самом деле существует всюду в U, но сначала покажем, что A и B являются координатными базисными векторами этой координатной системы, если они коммутируют в U. Перепишем наше отображение в виде координатного преобразования от $\{\alpha, \beta\}$ к $\{x^1, x^2\}$:

$$x^i(\alpha, \beta) = e^{\beta d/d\mu} e^{\alpha d/d\lambda} x^i |_P.$$

Базисные векторы $\partial/\partial\alpha$ и $\partial/\partial\beta$ имеют (в системе координат $\{x^i\}$) компоненты $\partial x^i/\partial\alpha$ и $\partial x^i/\partial\beta$ соответственно. Из (2.6) легко вытекает, что

$$\frac{d}{d\alpha} e^{\alpha d/d\lambda} = e^{\alpha d/d\lambda} \frac{d}{d\lambda},$$

и, поскольку $d/d\mu$ и $d/d\lambda$ коммутируют, мы получаем

$$\frac{\partial x^i}{\partial\alpha} = e^{\beta d/d\mu} e^{\alpha d/d\lambda} \frac{dx^i}{d\lambda}\Big|_P,$$
$$\frac{\partial x^i}{\partial\beta} = e^{\beta d/d\mu} e^{\alpha d/d\lambda} \frac{dx^i}{d\mu}\Big|_P.$$

Но $dx^i/d\lambda$ — это в точности компоненты поля $d/d\lambda$ в координатной системе $\{x^i\}$. Поскольку они являются аналитическими функциями на M, то после применения к ним оператора $\exp(\beta d/d\mu) \exp(\alpha d/d\lambda)$ мы получим их значение в точке, координаты которой равны (α, β). Следовательно, всюду на U

$$\partial/\partial\alpha = d/d\lambda \quad \text{и} \quad \partial/\partial\beta = d/d\mu;$$

тем самым мы доказали достаточность условия $[\bar{A}, \bar{B}] = 0$ для того, чтобы $\bar{A}$ и $\bar{B}$ были координатными базисными векторами.

Обратимся теперь к обещанному доказательству того, что $\{\alpha, \beta\}$ образуют координатную систему в U. Нужно доказать, что отображение $\{\alpha, \beta\} \mapsto \{x^i\}$ обратимо, и для этого мы используем теорему об обратной функции (см. § 1.2). Согласно этой теореме, если матрица

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial x^2}{\partial\alpha} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial\beta} & \dfrac{\partial x^2}{\partial\beta} \end{pmatrix}$$

в некоторой точке (α, β) имеет ненулевой определитель, то в некоторой окрестности этой точки указанное отображение обратимо. Определитель обращается в нуль, если и только если векторы $\partial x^i/\partial\alpha$, $\partial x^i/\partial\beta$ линейно-зависимы: из сказанного выше ясно, что этого никогда не бывает, ибо $\bar{A}$ и $\bar{B}$ линейно-независимы в U. Таким образом, наше отображение обратимо во всём множестве U и, значит, задаёт систему координат.

Интересно выяснить, в каком месте не пройдут наши рассуждения, если $[A, B] \neq 0$. В этом случае выражение $\partial x^i/\partial\beta$ более сложно. По-прежнему наше отображение будет обратимым, по крайней мере в некоторой окрестности точки $\alpha = \beta = 0$. Но поскольку $\partial x^i/\partial\beta$ уже не равно больше $dx^i/d\mu$ в изучаемой точке, векторы A и B не будут базисными векторами построенной системы координат.

Проведённые выше рассуждения обобщаются на n-мерный случай: если n векторных полей $\{\bar{Y}_{(j)}, j = 1, \ldots, n\}$ на n-мерном многообразии M линейно-независимы и коммутируют друг с другом в некоторой открытой области U на M, то они являются координатными базисными векторами координатной системы $\{\alpha_j\}$, имеющей в произвольных координатах $\{x^j\}$ вид

$$x^i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \exp\left[\sum_j \alpha_j \bar{Y}_{(j)}\right] x^i \Big|_P,$$

где в качестве «центра» P берётся произвольная точка из U.

2.16. ОДИН-ФОРМЫ

Вернёмся к изучению T_P — пространства всех касательных векторов в точке P. В качестве первого примера тензоров определим *один-формы* как линейные вещественнозначные функции на векторах. Это означает следующее: один-форма $\tilde{\omega}$ в точке P сопоставляет вектору $\bar{V}$ в точке P некоторое вещественное число, обозначаемое через $\tilde{\omega}(\bar{V})$. Обозначение с волной подчёркивает то обстоятельство, что $\tilde{\omega}$ является функцией на векторах. (Волна $\tilde{}$ над буквой всегда обозначает один-формы, точно так же как черта $\bar{}$ над буквой всегда обозначает векторы.) Линейность этой функции означает, что

$$\tilde{\omega}(a\bar{V} + b\bar{W}) = a\tilde{\omega}(\bar{V}) + b\tilde{\omega}(\bar{W}), \tag{2.15}$$

где a и b — вещественные числа. Непосредственно определяются сложение один-форм и их умножение на вещественные числа: $a\tilde{\omega}$ есть один-форма вида

$$(a\tilde{\omega})(\bar{V}) = a[\tilde{\omega}(\bar{V})], \tag{2.16a}$$

а сумма $\tilde{\omega} + \tilde{\sigma}$ есть один-форма вида

$$(\tilde{\omega} + \tilde{\sigma})(\bar{V}) = \tilde{\omega}(\bar{V}) + \tilde{\sigma}(\bar{V}) \tag{2.16b}$$

(здесь $\bar{V}$ — произвольный вектор). Таким образом, совокупность один-форм в данной точке образует векторное пространство; оно называется двойственным (дуальным, сопряжённым) к T_P и обозначается через T_P^*. Термин «двойственное» употребляется потому, что векторы также можно рассматривать как линейные вещественнозначные функции на