Интересно выяснить, в каком месте не пройдут наши рассуждения, если $[A, B] \neq 0$. В этом случае выражение $\partial x^i/\partial\beta$ более сложно. По-прежнему наше отображение будет обратимым, по крайней мере в некоторой окрестности точки $\alpha = \beta = 0$. Но поскольку $\partial x^i/\partial\beta$ уже не равно больше $dx^i/d\mu$ в изучаемой точке, векторы A и B не будут базисными векторами построенной системы координат.

Проведённые выше рассуждения обобщаются на n-мерный случай: если n векторных полей $\{\bar{Y}_{(j)}, j = 1, \ldots, n\}$ на n-мерном многообразии M линейно-независимы и коммутируют друг с другом в некоторой открытой области U на M, то они являются координатными базисными векторами координатной системы $\{\alpha_j\}$, имеющей в произвольных координатах $\{x^i\}$ вид

$$x^i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \exp\Big[\sum_j \alpha_j \bar{Y}_{(j)}\Big] x^i \Big|_P,$$

где в качестве «центра» P берётся произвольная точка из U.

2.16. ОДИН-ФОРМЫ

Вернёмся к изучению T_P — пространства всех касательных векторов в точке P. В качестве первого примера тензоров определим *один-формы* как линейные вещественнозначные функции на векторах. Это означает следующее: один-форма $\tilde{\omega}$ в точке P сопоставляет вектору $\bar{V}$ в точке P некоторое вещественное число, обозначаемое через $\tilde{\omega}(\bar{V})$. Обозначение с волной подчёркивает то обстоятельство, что $\tilde{\omega}$ является функцией на векторах. (Волна $\tilde{}$ над буквой всегда обозначает один-формы, точно так же как черта $\bar{}$ над буквой всегда обозначает векторы.) Линейность этой функции означает, что

$$\tilde{\omega}(a\bar{V} + b\bar{W}) = a\tilde{\omega}(\bar{V}) + b\tilde{\omega}(\bar{W}), \tag{2.15}$$

где a и b — вещественные числа. Непосредственно определяются сложение один-форм и их умножение на вещественные числа: $a\tilde{\omega}$ есть один-форма вида

$$(a\tilde{\omega})(\bar{V}) = a[\tilde{\omega}(\bar{V})], \tag{2.16a}$$

а сумма $\tilde{\omega} + \tilde{\sigma}$ есть один-форма вида

$$(\tilde{\omega} + \tilde{\sigma})(\bar{V}) = \tilde{\omega}(\bar{V}) + \tilde{\sigma}(\bar{V}) \tag{2.16b}$$

(здесь $\bar{V}$ — произвольный вектор). Таким образом, совокупность один-форм в данной точке образует векторное пространство; оно называется двойственным (дуальным, сопряжённым) к T_P и обозначается через T_P^*. Термин «двойственное» употребляется потому, что векторы также можно рассматривать как линейные вещественнозначные функции на один-формах. А именно, для любого вектора $\bar{V}$ мы *полагаем* его значение на один-форме $\tilde{\omega}$ равным $\tilde{\omega}(\bar{V})$. Это линейная функция, поскольку её значение на $a\tilde{\omega}+b\tilde{\sigma}$ равно, в силу (2.16),

$$(a\tilde{\omega}+b\tilde{\sigma})(\bar{V})=(a\tilde{\omega})(\bar{V})+(b\tilde{\sigma})(\bar{V})$$
$$=a\ (\text{значение } \bar{V} \text{ на } \tilde{\omega})+b\ (\text{значение } \bar{V} \text{ на } \tilde{\sigma}). \tag{2.17}$$

Таким образом, именно мы можем рассматривать каждую из этих величин как линейную вещественнозначную функцию, аргументом которой служит другая величина; поэтому и говорят, что векторы и один-формы *двойственны* друг другу. Значения одних на других записывают разными способами:

$$\blacklozenge \quad \tilde{\omega}(\bar{V})\equiv\bar{V}(\tilde{\omega})\equiv\langle\tilde{\omega},\bar{V}\rangle; \tag{2.18}$$

в последнем обозначении подчеркивается равноправие обоих партнёров. Величина $\tilde{\omega}(\bar{V})$ называется часто *свёрткой* с $\bar{V}$. В более старых руководствах по тензорной алгебре векторы часто называются «контравариантными векторами», а один-формы — «ковариантными векторами». Эти названия указывают на то, как ведут себя компоненты соответствующих объектов при замене базиса, о чём будет идти речь в § 2.26.

2.17. ПРИМЕРЫ ОДИН-ФОРМ

Прежде чем излагать дальше математическую теорию, рассмотрим несколько простых примеров один-форм. Один из наиболее часто встречающихся примеров — это градиент функции: о нём речь пойдёт в § 2.19. Приведём другие примеры.

(i) В матричной алгебре, если считать «векторами» вектор-столбцы, то вектор-строки будут один-формами. Действительно, если их перемножить (в правильном порядке) по обычным правилам матричного умножения, то получится вещественное число. Например, в двумерном случае вектор-строку $(-1,\ 5)$ можно считать функцией, сопоставляющей любому вектор-столбцу вещественное число:

$$(-1,\ 5):\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto(-1,\ 5)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-x+5y.$$

Легко проверяется линейность этой функции.

(ii) В используемых в квантовой механике гильбертовых пространствах аналогами вектор-строк и вектор-столбцов из примера (i) являются так называемые кет-векторы $|\psi\rangle$ (векторы) и бра-векторы $\langle\varphi|$ (один-формы) (названия и обозначения Дирака), свёртка $\langle\varphi|\psi\rangle$ которых есть комплексное