один-формах. А именно, для любого вектора $\bar{V}$ мы *полагаем* его значение на один-форме $\tilde{\omega}$ равным $\tilde{\omega}(\bar{V})$. Это линейная функция, поскольку её значение на $a\tilde{\omega}+b\tilde{\sigma}$ равно, в силу (2.16),

$$\begin{aligned}(a\tilde{\omega}+b\tilde{\sigma})(\bar{V}) &= (a\tilde{\omega})(\bar{V})+(b\tilde{\sigma})(\bar{V}) \\ &= a\ (\text{значение } \bar{V} \text{ на } \tilde{\omega})+b\ (\text{значение } \bar{V} \text{ на } \tilde{\sigma}).\end{aligned} \tag{2.17}$$

Таким образом, именно мы можем рассматривать каждую из этих величин как линейную вещественнозначную функцию, аргументом которой служит другая величина; поэтому и говорят, что векторы и один-формы *двойственны* друг другу. Значения одних на других записывают разными способами:

$$\blacklozenge \quad \tilde{\omega}(\bar{V}) \equiv \bar{V}(\tilde{\omega}) \equiv \langle\tilde{\omega}, \bar{V}\rangle; \tag{2.18}$$

в последнем обозначении подчеркивается равноправие обоих партнёров. Величина $\tilde{\omega}(\bar{V})$ называется часто *свёрткой* с $\bar{V}$. В более старых руководствах по тензорной алгебре векторы часто называются «контравариантными векторами», а один-формы — «ковариантными векторами». Эти названия указывают на то, как ведут себя компоненты соответствующих объектов при замене базиса, о чём будет идти речь в § 2.26.

2.17. ПРИМЕРЫ ОДИН-ФОРМ

Прежде чем излагать дальше математическую теорию, рассмотрим несколько простых примеров один-форм. Один из наиболее часто встречающихся примеров — это градиент функции: о нём речь пойдёт в § 2.19. Приведём другие примеры.

(i) В матричной алгебре, если считать «векторами» вектор-столбцы, то вектор-строки будут один-формами. Действительно, если их перемножить (в правильном порядке) по обычным правилам матричного умножения, то получится вещественное число. Например, в двумерном случае вектор-строку $(-1, 5)$ можно считать функцией, сопоставляющей любому вектор-столбцу вещественное число:

$$(-1,\ 5): \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (-1,\ 5)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -x+5y.$$

Легко проверяется линейность этой функции.

(ii) В используемых в квантовой механике гильбертовых пространствах аналогами вектор-строк и вектор-столбцов из примера (i) являются так называемые кет-векторы $|\psi\rangle$ (векторы) и бра-векторы $\langle\varphi|$ (один-формы) (названия и обозначения Дирака), свёртка $\langle\varphi|\psi\rangle$ которых есть комплексное число. (Обобщение векторной и тензорной алгебры на комплексный случай тривиально: нужно лишь заменить слово «вещественный» на «комплексный». Обобщение построенной выше теории вещественных многообразий на комплексно-аналитический случай, где координатными отображениями служат комплексно-аналитические отображения в пространство комплексных переменных $(z^1, z^2, \ldots, z_n)$, также по большей части не представляет труда. Но некоторые свойства комплексных многообразий, такие как глобальная структура и кривизна, гораздо труднее поддаются изучению, и этих вопросов в настоящей книге мы касаться не будем.) Обозначение $\langle\varphi|\psi\rangle$ аналогично (2.18), и это не случайно.

В обоих примерах (i) и (ii) имеется возможность «переводить векторы в один-формы (и обратно), сопоставляя данному вектору «сопряжённый», или «транспонированный», объект, являющийся один-формой. В § 2.29 мы увидим, что это эквивалентно заданию метрики или скалярного произведения в рассматриваемом векторном пространстве. Это очень важная дополнительная структура в векторном пространстве, но читателю следует иметь в виду, что нет никакого априорного, «естественного» способа идентификации один-форм и векторов.

2.18. ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ ДИРАКА

В квантовой механике часто приходится иметь дело с *функциональными пространствами* (пространствами функций). Рассмотрим множество $C[-1, 1]$ всех вещественнозначных функций класса C^∞, определённых на интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$ в R^1. Это множество является группой относительно сложения (сумма двух C^∞-функций снова есть C^∞-функция и т. д.) и векторным пространством над вещественными числами (если f есть C^∞-функция, то cf также будет C^∞-функцией для любой вещественной константы c). Элементы двойственного пространства (один-формы) называются *распределениями* (или обобщёнными функциями). Примером распределения служит *дельта-функция Дирака* $\delta(x)$, определяемая как один-форма, значение которой на C^∞-функции $f(x)$ есть $f(0)$:

$$\langle\delta(x), f(x)\rangle = f(0). \qquad (2.19)$$

В одном смысле $\delta(x)$ — действительно настоящая функция: она есть отображение $C[-1, 1] \to R$. Обычно термин «распределение» используется только для непрерывных (линейных) функций такого типа. Но понятие непрерывности требует введения топологии, на этот раз топологии в $C[-1, 1]$. Это — бесконечномерное векторное пространство (в нём имеется