число. (Обобщение векторной и тензорной алгебры на комплексный случай тривиально: нужно лишь заменить слово «вещественный» на «комплексный». Обобщение построенной выше теории вещественных многообразий на комплексно-аналитический случай, где координатными отображениями служат комплексно-аналитические отображения в пространство комплексных переменных $(z^1, z^2, \ldots, z_n)$, также по большей части не представляет труда. Но некоторые свойства комплексных многообразий, такие как глобальная структура и кривизна, гораздо труднее поддаются изучению, и этих вопросов в настоящей книге мы касаться не будем.) Обозначение $\langle\varphi|\psi\rangle$ аналогично (2.18), и это не случайно.

В обоих примерах (i) и (ii) имеется возможность «переводить векторы в один-формы (и обратно), сопоставляя данному вектору «сопряжённый», или «транспонированный», объект, являющийся один-формой. В § 2.29 мы увидим, что это эквивалентно заданию метрики или скалярного произведения в рассматриваемом векторном пространстве. Это очень важная дополнительная структура в векторном пространстве, но читателю следует иметь в виду, что нет никакого априорного, «естественного» способа идентификации один-форм и векторов.

2.18. ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ ДИРАКА

В квантовой механике часто приходится иметь дело с *функциональными пространствами* (пространствами функций). Рассмотрим множество $C[-1, 1]$ всех вещественнозначных функций класса C^∞, определённых на интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$ в R^1. Это множество является группой относительно сложения (сумма двух C^∞-функций снова есть C^∞-функция и т. д.) и векторным пространством над вещественными числами (если f есть C^∞-функция, то cf также будет C^∞-функцией для любой вещественной константы c). Элементы двойственного пространства (один-формы) называются *распределениями* (или обобщёнными функциями). Примером распределения служит *дельта-функция Дирака* $\delta(x)$, определяемая как один-форма, значение которой на C^∞-функции $f(x)$ есть $f(0)$:

$$\langle\delta(x),\ f(x)\rangle = f(0). \tag{2.19}$$

В одном смысле $\delta(x)$ — действительно настоящая функция: она есть отображение $C[-1, 1] \to R$. Обычно термин «распределение» используется только для непрерывных (линейных) функций такого типа. Но понятие непрерывности требует введения топологии, на этот раз топологии в $C[-1, 1]$. Это — бесконечномерное векторное пространство (в нём имеется бесконечное число линейно-независимых функций), а обсуждение топологии таких пространств далеко выходит за рамки настоящей книги. Интересующегося читателя мы отсылаем к Choquet-Bruhat et al. (1977). Здесь важно отметить, что мы понимаем дельта-функцию не в том смысле, который вкладывали в это понятие Дирак и его современники. Чтобы уяснить себе, что́ они имели в виду, разберём, как сделать из функции — элемента пространства $C[-1, 1]$ — один-форму на $C[-1, 1]$.

Для любой функции g из $C[-1,1]$ можно определить один-форму $\tilde{g}$, значение которой на функции f из $C[-1, 1]$ равно

$$\langle \tilde{g}, f \rangle = \int_{-1}^{1} g(x) f(x)\, dx. \tag{2.20}$$

Это, действительно, линейное отображение, переводящее f в значение соответствующего интеграла. (Поскольку g и f непрерывны на $-1 \leqslant x \leqslant 1$, этот интеграл всегда существует.) Термин «дельта-функция» был использован как камуфляж следующего обратного «рассуждения»: раз $\delta(x)$ — один-форма, то можно говорить о ней и как о функции от x в обычном смысле слова, такой что интеграл от её произведения на $f(x)$ равен $f(0)$:

$$\int_{-1}^{1} \delta(x) f(x)\, dx = f(0).$$

Эта идея была очень болезненно воспринята математиками, некоторые из них даже заявили, что Дирак ошибается, несмотря на то что он получал полезные и самосогласованные результаты. Физики, однако, мудро отвергли эту крайнюю точку зрения и больше прислушивались к своей интуиции. Теперь мы в состоянии понять, почему они «ошибались» и при этом получали верные результаты. Они «ошибались», поскольку говорили о $\delta(x)$ как о функции $R^1 \to R^1$, каковой существовать не может ни в каком точном смысле слова, и поскольку они манипулировали с ней, как с обычной функцией, интегрируя её и даже дифференцируя

$$\int_{-1}^{1} \delta'(x) f(x)\, dx = -\int_{-1}^{1} \delta(x) f'(x)\, dx = -f'(0).$$

Но они при этом были «правы», поскольку нигде не использовали $\delta(x)$ без интеграла с достаточно гладкой функцией $f(x)$ — они нигде не использовали её иначе, как для того, чтобы задать отображение функций в вещественные числа.

Таким образом, они пользовались техникой, но не языком теории обобщённых функций, которая была специально придумана для того, чтобы подвести под дельта-функции солидный фундамент. Отметим, однако, что теория обобщённых функций отличается от старой физической точки зрения своей большой простотой: можно определить дельта-функцию без привлечения правил типа (2.20) для превращения функций в один-формы. Как отмечалось в примере (ii) выше, такое правило есть дополнительная структура в векторном пространстве, которая, как мы теперь понимаем, не нужна для определения дельта-функции.

Стоит ещё заметить следующее. Выше мы сказали, что слово «распределение» используется только для *непрерывных* один-форм, в соответствии с общепринятым определением двойственного векторного пространства («топологического сопряжённого»). Однако в наше определение один-форм в § 2.16 требование непрерывности мы не включили; не проявили ли мы здесь непоследовательности? Нет, не проявили, потому что на конечномерном векторном пространстве любая линейная функция *всегда* непрерывна (см., например, Choquet-Bruhat et al. (1977) или Rudin (1964) из библиографии к гл. 1).

2.19. ГРАДИЕНТ И НАГЛЯДНОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ОДИН-ФОРМ

Поле один-форм — это, по аналогии с векторным полем, правило, задающее в каждой точке один-форму. Содержащиеся в формулах (2.16) определения переносятся на поля: в этом случае a есть функция на M, не обязательно постоянная. Дифференцируемость полей один-форм можно определить через дифференцируемость векторных полей и функций. А именно, на C^∞-многообразии заданная один-форма $\tilde{\omega}$ вместе с векторным полем $\bar{V}$ определяют функцию $\tilde{\omega}(\bar{V})$. Если эта функция принадлежит к классу C^∞ для любого C^∞-поля $\bar{V}$, то $\tilde{\omega}$ называется один-формой класса C^∞. (Более простое определение дифференцируемости мы дадим после того, как введём в § 2.20 компоненты один-форм.) Как и в случае векторных полей, возникает расслоенное пространство, называемое *кокасательным расслоением* T^*M; базой этого расслоения является M, а слоем над точкой P служит T_P^*. Сечения T^*M суть поля один-форм.

Наиболее полезный и поучительный пример один-формы — это градиент функции f, который мы обозначим через $\tilde{d}f$. Хотя в элементарных учебниках векторного анализа его и называют вектором, на самом деле это всё же один-форма. Итак, *градиент* $\tilde{d}f$ (не путать с «инфинитезимальным диффе-