Таким образом, они пользовались техникой, но не языком теории обобщённых функций, которая была специально придумана для того, чтобы подвести под дельта-функции солидный фундамент. Отметим, однако, что теория обобщённых функций отличается от старой физической точки зрения своей большой простотой: можно определить дельта-функцию без привлечения правил типа (2.20) для превращения функций в один-формы. Как отмечалось в примере (ii) выше, такое правило есть дополнительная структура в векторном пространстве, которая, как мы теперь понимаем, не нужна для определения дельта-функции.

Стоит ещё заметить следующее. Выше мы сказали, что слово «распределение» используется только для *непрерывных* один-форм, в соответствии с общепринятым определением двойственного векторного пространства («топологического сопряжённого»). Однако в наше определение один-форм в § 2.16 требование непрерывности мы не включили; не проявили ли мы здесь непоследовательности? Нет, не проявили, потому что на конечномерном векторном пространстве любая линейная функция *всегда* непрерывна (см., например, Choquet-Bruhat et al. (1977) или Rudin (1964) из библиографии к гл. 1).

2.19. ГРАДИЕНТ И НАГЛЯДНОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ОДИН-ФОРМ

Поле один-форм — это, по аналогии с векторным полем, правило, задающее в каждой точке один-форму. Содержащиеся в формулах (2.16) определения переносятся на поля: в этом случае a есть функция на M, не обязательно постоянная. Дифференцируемость полей один-форм можно определить через дифференцируемость векторных полей и функций. А именно, на C^∞-многообразии заданная один-форма $\tilde{\omega}$ вместе с векторным полем $\bar{V}$ определяют функцию $\tilde{\omega}(\bar{V})$. Если эта функция принадлежит к классу C^∞ для любого C^∞-поля $\bar{V}$, то $\tilde{\omega}$ называется один-формой класса C^∞. (Более простое определение дифференцируемости мы дадим после того, как введём в § 2.20 компоненты один-форм.) Как и в случае векторных полей, возникает расслоенное пространство, называемое *кокасательным расслоением* T^*M; базой этого расслоения является M, а слоем над точкой P служит T_P^*. Сечения T^*M суть поля один-форм.

Наиболее полезный и поучительный пример один-формы — это градиент функции f, который мы обозначим через $\tilde{d}f$. Хотя в элементарных учебниках векторного анализа его и называют вектором, на самом деле это всё же один-форма. Итак, *градиент* $\tilde{d}f$ (не путать с «инфинитезимальным дифференциалом» $\mathrm{d}f$, который мы изредка будем использовать[1]) определяется равенством

$$\blacklozenge \quad \tilde{\mathrm{d}}f(\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda) = \mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda, \tag{2.21}$$

где $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ — произвольный касательный вектор. Другими словами, градиент функции f в некоторой точке P — это такой элемент из T^*_P, значение которого на элементе $\bar{V}$ из T_P равно производной f по направлению вектора $\bar{V}$ (т. е. вдоль кривой с касательным вектором $\bar{V}$). Нужно проверить, что это линейная функция на T_P, т. е. что выполнено (2.15):

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{d}}f\left(a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}+b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\right) &= \left(a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}+b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\right)f = a\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}+b\frac{\mathrm{d}f}{d\mu}\\ &= a\tilde{\mathrm{d}}f(\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda)+b\tilde{\mathrm{d}}f(\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu).\end{aligned}$$

Линейность доказана. На первый взгляд может показаться, что f сама есть один-форма, поскольку f и $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ дают число $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda$. Но это неверно. Напомним читателю, что и T_P и T^*_P заданы в точке P, так что вся информация, необходимая для вычисления $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda$, также должна быть задана в этой же точке. Но значение f в P не влияет на $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda$. Чтобы вычислить $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda$ в P, нужно знать $\partial f/\partial x^i$ в P, а это и есть, как мы увидим далее, компоненты градиента f.

Градиент позволяет нам дать наглядную интерпретацию один-форм, дополняющую наглядную интерпретацию векторов как стрелок. На рис. 2.23 изображён кусок топографической карты местности, представляющий собой набор горизонталей — линий равной высоты. Если обозначить через h высоту над уровнем моря, то градиент $\tilde{d}h$, очевидно, наибольший в местах типа участка A, где линии наиболее плотно сближаются друг с другом, и наименьший в районе B, где горизонтали наиболее разрежены. Далее, пусть необходимо выяснить, насколько придётся подняться, двигаясь из одной точки в другую (близкую). Для этого на карте нужно провести линию (вектор $\Delta\bar{x}$) между этими точками. Тогда число горизонталей, которые пересечёт эта линия, даст изменение высоты. Например, линия 1 пересекает полторы горизонтали, а линия 2 — две. Линия 3 начинается там же, где и 2, но идёт в другом направлении, набирая высоты лишь на полгоризонтали. Эти числа: $1\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$ — и есть Δh, причём Δh линейно зависит от $\Delta\bar{x}$:

$$\Delta h = \sum \frac{\partial h}{\partial x^i}\Delta x^i.$$

---

[1]) Прекрасное обсуждение связи между $\tilde{d}f$ и df см. в книге Spivak (1970, vol. 1).

Это — *значение* $\tilde{d}h$ на $\Delta\bar{x}$ (см. (2.21) выше и (2.27) ниже). Следовательно, один-форму $\tilde{\omega}$ можно наглядно изобразить в виде семейства поверхностей (рис. 2.24), а её свёртка с вектором $\bar{V}$ есть число поверхностей, которые $\bar{V}$ пересекает. Чем ближе друг к другу поверхности, тем больше $\tilde{\omega}$. Собственно говоря, так же как вектор направлен по прямой, так и поверхности один-форм прямые (плоские) и параллельные. Это объясняется тем, что мы работаем с один-формами в точке, а не в протяжённой области, т. е. рассматриваем «касательные» один-формы, по аналогии с касательными векторами.

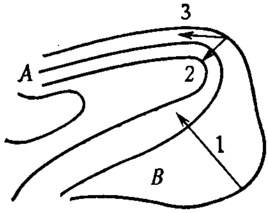

Рис. 2.23. Топографическая карта холмистой местности. Кривые на рисунке — это линии равной высоты над уровнем моря. Стрелками указаны возможные пути подъёма.

Рис. 2.24. "Касательная" один-форма $\tilde{\omega}$ может быть наглядно изображена в виде семейства параллельных плоскостей размерности, на единицу меньшей, чем размерность многообразия. Число плоскостей, пересекаемых вектором $\bar{V}$, равно свёртке $\langle\tilde{\omega}, \bar{V}\rangle$.

Из этих рисунков видно, почему, вообще говоря, нельзя называть градиент вектором. Хотелось бы отождествить градиент с *вектором*, указывающим направление «вверх» по склону, т. е. с вектором, который пересекает наибольшее число горизонталей на единицу длины. Но обратите внимание на слова «на единицу длины». Если на многообразии имеется мера длины, то градиенту *можно* сопоставить вектор. Но если неизвестно, как сравнивать длины векторов, смотрящих в разных направлениях, то определить *направление* самого крутого подъёма нельзя, и в этом случае отличие градиента от вектора существенно. Поскольку мы, вообще говоря, не предполагаем наличие длины (или «метрики»), следует постоянно помнить о различии между векторами и один-формами. Мы вернёмся к этому вопросу в § 2.29.

2.20. БАЗИСНЫЕ ОДИН-ФОРМЫ И КОМПОНЕНТЫ ОДИН-ФОРМ

В векторном пространстве T_P^* один-форм в точке P любые n линейно-независимых один-форм образуют базис. Однако если уже выбран базис $\{\bar{e}_i, i = 1, \ldots, n\}$ в простран-