точкой зрения читатель этой книги всюду должен иметь в виду, что все многообразия в этой книге дифференцируемы столько раз, сколько нужно для наших рассуждений.

2.2. СФЕРА КАК МНОГООБРАЗИЕ

Одним из простейших примеров многообразия, иллюстрирующим важность того обстоятельства, что допускается более чем одна карта, служит сфера (поверхность шара). Рассмотрим двумерную сферу (обозначаемую через S^2) — множество

Рис. 2.4. Маленькая окрестность точки P на сфере S^2 взаимно-однозначно отображается на круг в R^2.

точек в R^3, для которых $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=\text{const}$. Каждая её точка имеет достаточно малую окрестность, допускающую 1-1-отображение на круг в R^2 (см. рис. 2.4). Ясно, что

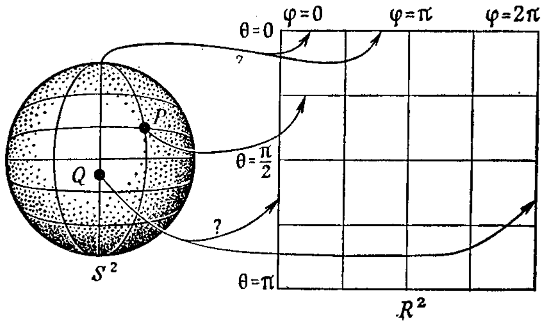

Рис. 2.5. Обычные сферические координаты задают отображение из S^2 в R^2, "хорошее" для обыкновенных точек типа P. А что является образом северного полюса? И какую из двух указанных точек считать образом точки Q, лежащей на меридиане $\varphi=0$?

соответствующее отображение никоим образом не сохраняет длины или углы. В качестве конкретного примера такого отображения рассмотрим обычные сферические координаты $\theta\equiv x^1$, $\varphi\equiv x^2$. На первый взгляд может показаться, что вся сфера отображается на прямоугольник $0\leqslant x^1\leqslant\pi$, $0\leqslant x^2\leqslant 2\pi$ (рис. 2.5). Однако при более внимательном рассмотрении видно, что здесь что-то не так. Во-первых, отображение портится в полюсе $\theta = 0$, где одна точка «отображается» в целую линию $x^1 = 0$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 2\pi$. Так что в полюсе, собственно, никакого отображения и нет. Второй трудностью является то, что точки, для которых $\varphi = 0$, «отображаются» в два различных места: $x^2 = 0$ и $x^2 = 2\pi$, чего опять-таки не должно быть для настоящего отображения. Выйти из этого затруднения можно, лишь ограничив координатное отображение на открытую область $0 < x^1 < \pi$, $0 < x^2 < 2\pi$. Тогда оба полюса и соединяющая их полуокружность $\varphi = 0$ устраняются. Поэтому нужно хотя бы два отображения, чтобы покрыть сферу полностью. Второе может быть, скажем, другой сферической системой координат, у которой меридиан $\varphi = 0$ образует часть экватора первой системы. Ясно, что каждая точка на сфере лежит по крайней мере в одной из двух этих карт. Функции перекрытия, выражающие координаты второй системы через координаты первой, довольно сложны, но совершенно очевидно, что они аналитичны. Поэтому сфера является аналитическим многообразием.

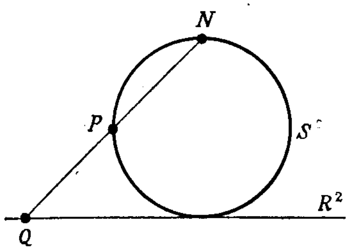

Рис. 2.6. Стереографическая проекция S^2 в R^2. Сфера с выколотым северным полюсом N является открытым множеством, и это множество отображается на всё R^2. В само́й точке N отображение перестает действовать.

Другим, более «хорошим» отображением сферы S^2 на область в R^2, портящимся только в одной точке, является так называемая стереографическая проекция сферы на плоскость, изображённая в вертикальном сечении на рис. 2.6. Сфера касается плоскости, и из полюса N на сфере, диаметрально противоположного точке касания, проводится прямая. Эта прямая пересекает сферу в точке P, а плоскость — в точке Q. Этим и задаётся координатное отображение: P отображается в Q; другими словами, координатами точки P на сфере являются координаты точки Q на R^2. Это отображение взаимно-однозначно всюду, кроме N, поскольку, когда проведённая через N прямая делается горизонтальной (P достигает N), точка Q уходит на бесконечность. В каком бы направлении ни уходила точка Q на бесконечность, точка P будет стремиться к N. Таким образом, N отображается на всю «бесконечность», и вблизи N нужно использовать другую координатную систему. Нет никакого координатного отображения, которое годилось бы для всей сферы S^2. Обратим внимание, что это обстоятельство связано только с глобальной топологией S^2: всё сказанное выше справедливо и для поверхности кегли или бутылки, получающихся деформацией из S^2. Напротив, двумерная внутренность кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями в R^2, *может* быть покрыта одной координатной системой. Попробуйте её найти!

2.3. ДРУГИЕ ПРИМЕРЫ МНОГООБРАЗИЙ

Полезность понятия многообразия заключается в его общности: многообразиями оказываются такие множества, которые, не будь этого понятия, никому бы и в голову не пришло считать пространствами. По определению *любое* множество M, допускающее непрерывную параметризацию, является многообразием, размерность которого равна числу независимых параметров. Например:

(i) Совокупность всех вращений твёрдого тела в трёхмерном пространстве является многообразием, поскольку она может быть непрерывно параметризована тремя «углами Эйлера» (см. Goldstein, 1950).

(ii) Совокупность всех лоренцевых преобразований, задаваемых переходом к движущейся системе отсчета, устроена как трёхмерное многообразие: параметрами служат три компоненты скорости движения.

(iii) Для N частиц величины, определяющие их положения ($3N$ величин) и скорости ($3N$ величин), задают точку в $6N$-мерном многообразии, называемом фазовым пространством.

(iv) Если задано уравнение (алгебраическое или дифференциальное) для величины y как функции от независимой переменной x, то можно ввести структуру многообразия на множестве *всех* пар (y, x): каждое частное решение есть кривая на этом многообразии. Этот пример легко обобщается на случай произвольного числа зависимых и независимых переменных.

(v) Особенно часто встречающимся примером многообразия служит векторное пространство, определение которого было дано в § 1.5. (Мы рассматриваем здесь лишь векторные пространства над вещественными числами.) Для того чтобы убедиться в том, что векторное пространство является многообразием, построим отображение его в некоторое R^n. Пусть векторное пространство n-мерно, выберем в нём произвольный базис $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$. Тогда любой вектор $\bar{y}$ представляется в виде линейной комбинации

$$\bar{y} = a_1\bar{e}_1 + \ldots + a_n\bar{e}_n. \tag{2.1}$$

Но $\bar{y}$ есть точка V; тем самым установлено отображение из V в R^n, $\bar{y} \longmapsto (a_1, \ldots, a_n)$. На самом деле каждой точке из R^n отвечает при этом отображении единственный вектор из V, так что V не только целиком покрывается одной координат-