Это — *значение* $\tilde{d}h$ на $\Delta\bar{x}$ (см. (2.21) выше и (2.27) ниже). Следовательно, один-форму $\tilde{\omega}$ можно наглядно изобразить в виде семейства поверхностей (рис. 2.24), а её свёртка с вектором $\bar{V}$ есть число поверхностей, которые $\bar{V}$ пересекает. Чем ближе друг к другу поверхности, тем больше $\tilde{\omega}$. Собственно говоря, так же как вектор направлен по прямой, так и поверхности один-форм прямые (плоские) и параллельные. Это объясняется тем, что мы работаем с один-формами в точке, а не в протяжённой области, т. е. рассматриваем «касательные» один-формы, по аналогии с касательными векторами.

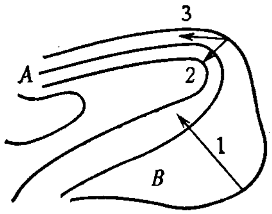

Рис. 2.23. Топографическая карта холмистой местности. Кривые на рисунке — это линии равной высоты над уровнем моря. Стрелками указаны возможные пути подъёма.

Рис. 2.24. "Касательная" один-форма $\tilde{\omega}$ может быть наглядно изображена в виде семейства параллельных плоскостей размерности, на единицу меньшей, чем размерность многообразия. Число плоскостей, пересекаемых вектором $\bar{V}$, равно свёртке $\langle\tilde{\omega}, \bar{V}\rangle$.

Из этих рисунков видно, почему, вообще говоря, нельзя называть градиент вектором. Хотелось бы отождествить градиент с *вектором*, указывающим направление «вверх» по склону, т. е. с вектором, который пересекает наибольшее число горизонталей на единицу длины. Но обратите внимание на слова «на единицу длины». Если на многообразии имеется мера длины, то градиенту *можно* сопоставить вектор. Но если неизвестно, как сравнивать длины векторов, смотрящих в разных направлениях, то определить *направление* самого крутого подъёма нельзя, и в этом случае отличие градиента от вектора существенно. Поскольку мы, вообще говоря, не предполагаем наличие длины (или «метрики»), следует постоянно помнить о различии между векторами и один-формами. Мы вернёмся к этому вопросу в § 2.29.

2.20. БАЗИСНЫЕ ОДИН-ФОРМЫ И КОМПОНЕНТЫ ОДИН-ФОРМ

В векторном пространстве T_P^* один-форм в точке P любые n линейно-независимых один-форм образуют базис. Однако если уже выбран базис $\{\bar{e}_i, i = 1, \ldots, n\}$ в пространстве T_P векторов в точке P, то имеется привилегированный базис $\{\tilde{\omega}^i,\ i=1, \ldots, n\}$ в T_P^*, называемый *двойственным* (или *дуальным*) *базисом*. Его определение таково. Если $\bar{V}$ — произвольный вектор в точке P, то $\tilde{\omega}^i$ даёт его i-ю компоненту:

$$\tilde{\omega}^i(\bar{V}) = V^i. \tag{2.22}$$

Легко видеть, что эта функция линейна по $\bar{V}$, поскольку i-я компонента, скажем, суммы $\bar{V} + \bar{W}$ равна $V^i + W^i$. Следовательно, (2.22) действительно определяет линейную функцию на T_P. В частности, поскольку базисный вектор $\bar{e}_j$ имеет лишь одну, j-ю, ненулевую компоненту, то

$$\tilde{\omega}^i(\bar{e}_j) = \delta^i{}_j. \tag{2.23}$$

При помощи этого равенства базис $\{\tilde{\omega}^i\}$ обычно и определяется в учебниках. Отметим особо, что для нахождения любого $\tilde{\omega}^i$ надо знать *все* векторы $\{\bar{e}_j\}$. Изменение какого-то одного $\bar{e}_k$ меняет, вообще говоря, *все* базисные один-формы $\tilde{\omega}^i$. Мы построили соответствие между базисом и двойственным базисом, а не между индивидуальными векторами и соответствующими один-формами.

Пока не было доказано, что один-формы $\{\omega^i\}$ линейно-независимы и, значит, образуют базис. Это легко вытекает из (2.23), но мы пойдём другим, обходным путём. Рассмотрим любую один-форму $\tilde{q}$, действующую на произвольный вектор $\bar{V}$:

$$\tilde{q}(\bar{V}) = \tilde{q}\Big(\sum_j V^j \bar{e}_j\Big) = \sum_j V^j \tilde{q}(\bar{e}_j) = \sum_j \tilde{\omega}^j(\bar{V})\, \tilde{q}(\bar{e}_j). \tag{2.24}$$

Величины

$$q_j = \tilde{q}(\bar{e}_j) \tag{2.25}$$

называются *компонентами* $\tilde{q}$ в базисе, дуальном к $\{\bar{e}_j\}$. Для того чтобы убедиться в том, что это больше, чем просто аналогия с (2.22), перепишем (2.24) в виде

$$\tilde{q}(\bar{V}) = \sum q_j \tilde{\omega}^j(\bar{V}).$$

Поскольку один-форма *определяется* своими значениями на векторах, из этого равенства вместе с (2.16) вытекает, ввиду произвольности $\bar{V}$, что

◆ $$\tilde{q} = \sum_j q_j \tilde{\omega}^j. \tag{2.26}$$

Отсюда следует, что $\{\omega^j\}$ действительно образуют базис, поскольку их как раз n штук и любая один-форма $\tilde{q}$ представима в виде их линейной комбинации. Отсюда следует также, что величины $\{q_i\}$ на самом деле являются компонентами $\tilde{q}$ относительно этого базиса в обычном смысле слова.

Самое важное то, что у нас есть теперь формула для вычисления значения $\tilde{q}(\bar{V})$ известным компонентам $\tilde{q}$ и $\bar{V}$:

$$\tilde{q}(\bar{V}) = \sum_j q_j V^j. \tag{2.27}$$

Как отмечалось выше, это есть свёртка $\bar{V}$ и $\tilde{q}$.

Разумеется, все эти рассуждения непосредственно переносятся на поля один-форм. Если совокупность векторных полей $\{\bar{e}_j\}$ образует базис в каждой точке некоторой области U многообразия M, то поля $\{\tilde{\omega}^j\}$, определяемые равенством (2.23), равным образом образуют базис в каждой точке из U. Данная система координат $\{x^i\}$ в области U определяет естественный базис векторных полей $\{\partial/\partial x^i\}$. Она же определяет естественное семейство один-форм — семейство, состоящее из n градиентов $\{\tilde{d}x^i\}$. Эти один-формы фактически образуют базис, дуальный к координатному базису векторов; действительно, в силу (2.21)

$$\tilde{d}x^i(\partial/\partial x^j) \equiv \partial x^i/\partial x^j = \delta^i{}_j \tag{2.28}$$

(второе равенство вытекает из свойств обычных частных производных).

В § 2.19 мы дали определение дифференцируемости поля один-форм. Теперь легко доказать, что $\tilde{q}$ есть форма класса C^∞, если и только если её компоненты $\{q^i\}$ относительно некоторого базиса из векторных полей класса C^∞ являются C^∞-функциями.

2.21. ИНДЕКСНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Мы используем следующие соглашения, касающиеся расстановки индексов. Компоненты векторов, например V^i, нумеруются верхними индексами; компоненты один-форм, например ω_j, — нижними. Базисные векторы нумеруются нижними индексами $(\bar{e}_j)$, базисные один-формы — верхними $(\tilde{\omega}^j)$ (Для координатных базисов мы получаем согласно этим правилам, что один-формы $\tilde{d}x^i$ нумеруются верхними индексами, как оно и должно быть; векторы $\partial/\partial x^j$ считаются имеющими нижние индексы, ибо они появляются в знаменателе как верхние.) Эти правила расстановки индексов очень полезны. Рассмотрим свёртку

$$\tilde{\omega}(\bar{V}) = \sum_j V^j \omega_j,$$