величины $\{q_i\}$ на самом деле являются компонентами $\tilde{q}$ относительно этого базиса в обычном смысле слова.

Самое важное то, что у нас есть теперь формула для вычисления значения $\tilde{q}(\bar{V})$ известным компонентам $\tilde{q}$ и $\bar{V}$:

$$\tilde{q}(\bar{V})=\sum_j q_j V^j. \tag{2.27}$$

Как отмечалось выше, это есть свёртка $\bar{V}$ и $\tilde{q}$.

Разумеется, все эти рассуждения непосредственно переносятся на поля один-форм. Если совокупность векторных полей $\{\bar{e}_j\}$ образует базис в каждой точке некоторой области U многообразия M, то поля $\{\tilde{\omega}^j\}$, определяемые равенством (2.23), равным образом образуют базис в каждой точке из U. Данная система координат $\{x^i\}$ в области U определяет естественный базис векторных полей $\{\partial/\partial x^i\}$. Она же определяет естественное семейство один-форм — семейство, состоящее из n градиентов $\{\tilde{d}x^i\}$. Эти один-формы фактически образуют базис, дуальный к координатному базису векторов; действительно, в силу (2.21)

$$\tilde{d}x^i(\partial/\partial x^j)\equiv \partial x^i/\partial x^j=\delta^i{}_j \tag{2.28}$$

(второе равенство вытекает из свойств обычных частных производных).

В § 2.19 мы дали определение дифференцируемости поля один-форм. Теперь легко доказать, что $\tilde{q}$ есть форма класса C^∞, если и только если её компоненты $\{q^i\}$ относительно некоторого базиса из векторных полей класса C^∞ являются C^∞-функциями.

2.21. ИНДЕКСНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Мы используем следующие соглашения, касающиеся расстановки индексов. Компоненты векторов, например V^i, нумеруются верхними индексами; компоненты один-форм, например ω_j, — нижними. Базисные векторы нумеруются нижними индексами $(\bar{e}_j)$, базисные один-формы — верхними $(\tilde{\omega}^j)$ (Для координатных базисов мы получаем согласно этим правилам, что один-формы $\tilde{d}x^i$ нумеруются верхними индексами, как оно и должно быть; векторы $\partial/\partial x^j$ считаются имеющими нижние индексы, ибо они появляются в знаменателе как верхние.) Эти правила расстановки индексов очень полезны. Рассмотрим свёртку

$$\tilde{\omega}(\bar{V})=\sum_j V^j\omega_j,$$

представляющую собой сумму произведений, в которых один из сомножителей имеет верхний индекс, а другой — нижний. Мы примем *правило суммирования Эйнштейна*: если в некотором выражении какой-нибудь индекс встречается дважды — один раз как верхний, а другой — как нижний (такие индексы называют *повторяющимися*), то подразумевается, что по этому индексу производится суммирование. Таким образом, в выражениях

$$\tilde{\omega} = \omega_j \tilde{d}x^j, \quad \bar{V} = V^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \tilde{\omega}(\bar{V}) = V^j \omega_j$$

подразумевается суммирование. В выражениях

$$V^i W^k, \quad V^i \omega_i, \quad V^i W^i$$

никакого суммирования не производится; в первых двух вообще нет повторяющихся индексов, а в последнем оба индекса верхние. Использование правила Эйнштейна очень упрощает запись вычислений с компонентами, а наши правила расположения индексов минимизируют вероятность появления случайной ошибки при использовании этого правила.

Теперь мы в состоянии перейти от векторной алгебры к тензорной.

2.22. ТЕНЗОРЫ И ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

Тензоры — естественное обобщение тех понятий, с которыми мы уже имели дело. Их алгебра устроена просто, и они имеют множество разнообразных применений. Главная проблема для тех, кто впервые сталкивается с тензорами, — это невозможность их «визуализации»: их трудно нарисовать. Выше мы выяснили, как изображать векторы и один-формы; те же приемы можно в той или иной мере перенести на тензоры более высоких «рангов», но картинки делаются крайне запутанными. По-видимому, в большинстве случаев лучше отказаться от попыток рисовать тензоры и работать с ними в рамках того определения, которое мы сейчас дадим, т. е. думать о тензорах как о линейных операторах на векторах и один-формах.

Рассмотрим точку P на M. Тензор типа $\binom{N}{N'}$ в точке P определяется как линейная функция, аргументами которой служат N один-форм и N' векторов, а значениями — вещественные числа. Это определение является обобщением данного выше для один-форм. Под «линейностью» мы понимаем здесь линейность по *каждому* аргументу (это свойство называют обычно полилинейностью). Например, если F — тензор