представляющую собой сумму произведений, в которых один из сомножителей имеет верхний индекс, а другой — нижний. Мы примем *правило суммирования Эйнштейна*: если в некотором выражении какой-нибудь индекс встречается дважды — один раз как верхний, а другой — как нижний (такие индексы называют *повторяющимися*), то подразумевается, что по этому индексу производится суммирование. Таким образом, в выражениях

$$\tilde{\omega}=\omega_j\,\tilde{d}x^j,\quad \bar{V}=V^j\frac{\partial}{\partial x^j},\quad \tilde{\omega}(\bar{V})=V^j\omega_j$$

подразумевается суммирование. В выражениях

$$V^jW^k,\quad V^j\omega_i,\quad V^jW^j$$

никакого суммирования не производится; в первых двух вообще нет повторяющихся индексов, а в последнем оба индекса верхние. Использование правила Эйнштейна очень упрощает запись вычислений с компонентами, а наши правила расположения индексов минимизируют вероятность появления случайной ошибки при использовании этого правила.

Теперь мы в состоянии перейти от векторной алгебры к тензорной.

## 2.22. ТЕНЗОРЫ И ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

Тензоры — естественное обобщение тех понятий, с которыми мы уже имели дело. Их алгебра устроена просто, и они имеют множество разнообразных применений. Главная проблема для тех, кто впервые сталкивается с тензорами, — это невозможность их «визуализации»: их трудно нарисовать. Выше мы выяснили, как изображать векторы и один-формы; те же приемы можно в той или иной мере перенести на тензоры более высоких «рангов», но картинки делаются крайне запутанными. По-видимому, в большинстве случаев лучше отказаться от попыток рисовать тензоры и работать с ними в рамках того определения, которое мы сейчас дадим, т. е. думать о тензорах как о линейных операторах на векторах и один-формах.

Рассмотрим точку $P$ на $M$. Тензор типа $\binom{N}{N'}$ в точке $P$ определяется как линейная функция, аргументами которой служат $N$ один-форм и $N'$ векторов, а значениями — вещественные числа. Это определение является обобщением данного выше для один-форм. Под «линейностью» мы понимаем здесь линейность по *каждому* аргументу (это свойство называют обычно полилинейностью). Например, если $\mathsf{F}$ — тензор типа $\binom{2}{2}$, то его значение на один-формах $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\sigma}$ и векторах $V$ и $W$ записывается в виде

$$\mathsf{F}(\tilde{\omega}, \tilde{\sigma}; \bar{V}, \bar{W}).$$

Свойство линейности здесь означает, что (для произвольных чисел $a$ и $b$)

$$\mathsf{F}(a\tilde{\omega} + b\tilde{\lambda}, \tilde{\sigma}; \bar{V}, \bar{W}) = a\mathsf{F}(\tilde{\omega}, \tilde{\sigma}; \bar{V}, \bar{W}) + b\mathsf{F}(\tilde{\lambda}, \tilde{\sigma}; \bar{V}, \bar{W}) \tag{2.29}$$

и аналогично для других аргументов. В случае если мы хотим иметь дело с $\mathsf{F}$, не указывая явно аргументы, мы будем использовать обозначение $\mathsf{F}(\ ,\ ;\ ,\ )$, где на пустые места можно поставить любые аргументы соответствующего типа (один-формы до точки с запятой и векторы — после). Разумеется, порядок аргументов, вообще говоря, существен, как это видно уже на примере функций вещественных переменных (скажем, у функции $f(x, y) = 3x + 5y$ значения $f(1,2)$ и $f(2,1)$ различны).

Как и в случае векторов и один-форм, *тензорное поле* типа $\binom{N}{N'}$ — это правило, сопоставляющее каждой точке тензор типа $\binom{N}{N'}$ в этой точке. Свойство линейности тензоров распространяется и на тензорные поля, причём числа $a$ и $b$ в (2.29) в разных точках могут быть различными — они являются функциями на $M$. Дифференцируемость тензорных полей определяется так же, как и для один-форм (см. § 2.19).

Отметим, что векторы суть тензоры типа $\binom{1}{0}$: они являются линейными функциями на один-формах. Аналогично один-формы суть тензоры типа $\binom{0}{1}$. Скалярные функции на многообразии принято считать тензорами типа $\binom{0}{0}$ (см. § 2.28 «Функции и скаляры»). Тензор $\mathsf{T}$ типа $\binom{1}{1}$ предполагает наличие двух аргументов. Значение $\mathsf{T}(\tilde{\omega}; \bar{V})$ есть вещественное число; при фиксированном $\tilde{\omega}$ мы получаем один-форму $\mathsf{T}(\tilde{\omega};\ )$, поскольку сюда нужно подставить вектор, для того чтобы получить вещественное число; $\mathsf{T}(\ ; \bar{V})$ есть вектор. Таким образом, тензор типа $\binom{1}{1}$ можно рассматривать как линейную функцию на векторах со значениями в векторах, а также как линейную функцию на один-формах, принимающую значения также в один-формах. Такие трюки можно проделывать с любыми тензорами.