2.23. ПРИМЕРЫ ТЕНЗОРОВ

Хотя понятие тензора, как оно определено выше, может показаться довольно абстрактным, оно весьма часто непосредственно приложимо к конкретным ситуациям. Мы приведём сейчас три примера, а чуть позже посвятим целый параграф (§ 2.29) обсуждению одного чрезвычайно важного тензора — метрического тензора.

(i) Наш первый пример — из матричной алгебры. Если вектор-столбцы считать векторами, а вектор-строки — один-формами, то матрицы суть тензоры типа $\binom{1}{1}$, так как, умножая матрицу на вектор, мы получаем вектор, а умножая её на вектор с одной стороны и на один-форму — с другой, получаем число.

Упражнение 2.4. Линейное преобразование в смысле матричной алгебры (например, ортогональное преобразование (вращение)) преобразует одну матрицу в другую. Покажите, что это индуцированное преобразование матриц есть тензор типа $\binom{2}{2}$.

(ii) Второй пример относится к упоминавшемуся в § 2.18 функциональному пространству $C[-1, 1]$. Линейный дифференциальный оператор (например, $x^2 \mathrm{d}/\mathrm{d}x$) переводит функции (векторы этого пространства) в другие функции (векторы). Будучи линейным, этот оператор является тензором типа $\binom{1}{1}$ в этом пространстве.

(iii) Третий наш пример — тензор напряжений. Читатели, знакомые с теорией упругости, знают, что это такое. Если в деформированном материале выделить мысленно некоторую площадку, то тензор напряжений определяет вектор напряжения, действующий на этой площадке (силу на единицу площади, с которой материал по одну сторону площадки действует на материал по другую её сторону). Так как площадка — это поверхность, а поверхности представляются один-формами, то тензор напряжений оказывается линейной функцией на один-формах, принимающей значения в векторах, т. е. тензором типа $\binom{2}{0}$.

2.24. КОМПОНЕНТЫ ТЕНЗОРОВ И ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Простейший пример тензора типа $\binom{2}{0}$ строится так: берём два вектора $\bar{V}$ и $\bar{W}$ и определяем тензор $\bar{V} \otimes \bar{W}$ как тензор, значение которого на двух один-формах $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ равно