2.23. ПРИМЕРЫ ТЕНЗОРОВ

Хотя понятие тензора, как оно определено выше, может показаться довольно абстрактным, оно весьма часто непосредственно приложимо к конкретным ситуациям. Мы приведём сейчас три примера, а чуть позже посвятим целый параграф (§ 2.29) обсуждению одного чрезвычайно важного тензора — метрического тензора.

(i) Наш первый пример — из матричной алгебры. Если вектор-столбцы считать векторами, а вектор-строки — один-формами, то матрицы суть тензоры типа $\binom{1}{1}$, так как, умножая матрицу на вектор, мы получаем вектор, а умножая её на вектор с одной стороны и на один-форму — с другой, получаем число.

Упражнение 2.4. Линейное преобразование в смысле матричной алгебры (например, ортогональное преобразование (вращение)) преобразует одну матрицу в другую. Покажите, что это индуцированное преобразование матриц есть тензор типа $\binom{2}{2}$.

(ii) Второй пример относится к упоминавшемуся в § 2.18 функциональному пространству $C[-1, 1]$. Линейный дифференциальный оператор (например, $x^2 \mathrm{d}/\mathrm{d}x$) переводит функции (векторы этого пространства) в другие функции (векторы). Будучи линейным, этот оператор является тензором типа $\binom{1}{1}$ в этом пространстве.

(iii) Третий наш пример — тензор напряжений. Читатели, знакомые с теорией упругости, знают, что это такое. Если в деформированном материале выделить мысленно некоторую площадку, то тензор напряжений определяет вектор напряжения, действующий на этой площадке (силу на единицу площади, с которой материал по одну сторону площадки действует на материал по другую её сторону). Так как площадка — это поверхность, а поверхности представляются один-формами, то тензор напряжений оказывается линейной функцией на один-формах, принимающей значения в векторах, т. е. тензором типа $\binom{2}{0}$.

2.24. КОМПОНЕНТЫ ТЕНЗОРОВ И ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Простейший пример тензора типа $\binom{2}{0}$ строится так: берём два вектора $\bar{V}$ и $\bar{W}$ и определяем тензор $\bar{V} \otimes \bar{W}$ как тензор, значение которого на двух один-формах $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ равно произведению $\bar{V}(\tilde{p})\,\bar{W}(\tilde{q})$:

$$\bar{V} \otimes \bar{W}(\tilde{p}, \tilde{q}) \equiv \bar{V}(\tilde{p})\,\bar{W}(\tilde{q}). \tag{2.30}$$

Операция $\otimes$ называется *тензорным* (или *внешним*) *произведением*. Её обобщение на случай произвольного числа тензоров произвольного типа очевидно. Тензорным произведением тензора типа $\binom{N}{M}$ и тензора типа $\binom{N'}{M'}$ будет тензор типа $\binom{N+N'}{M+M'}$.

Компонентами тензора называются его значения на базисных векторах и один-формах. Скажем, если S — тензор типа $\binom{3}{2}$, то его компоненты относительно базиса $\{\bar{e}_i\}$ имеют вид

$$\blacklozenge \quad S^{ijk}{}_{lm} \equiv \mathsf{S}(\tilde{\omega}^i, \tilde{\omega}^j, \tilde{\omega}^k; \bar{e}_l, \bar{e}_m). \tag{2.31}$$

Если порядок аргументов тензора S существенен, то существенным является и порядок индексов у компонент $S^{ijk}{}_{lm}$.

Обобщение понятия компоненты на тензорные поля и определение дифференцируемости тензорных полей совершенно аналогичны случаю один-форм (см. § 2.20).

Упражнение 2.5. (a) Докажите, что общий тензор типа $\binom{2}{0}$ нельзя представить в виде тензорного произведения двух векторов. (Указание: подсчитайте число компонент тензора типа $\binom{2}{0}$.)

(b) Докажите, что тензор $\bar{V} \otimes \tilde{\omega}$ типа $\binom{1}{1}$ имеет компоненты $V^i\omega_j$.

Упражнение 2.6. Докажите, что тензоры типа $\binom{2}{0}$ в точке P образуют векторное пространство относительно сложения, определённого аналогично (2.16b). Докажите, что тензоры $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ образуют базис этого пространства. (Таким образом, хотя общий тензор типа $\binom{2}{0}$ и не представляется в виде тензорного произведения, он представляется в виде *линейной комбинации* тензорных произведений.) Это векторное пространство обозначается через $T_P \otimes T_P$.

2.25. СВЁРТКА

Как было указано в упр. 2.5, величины $\{V^i\omega_j\}$ являются компонентами тензора типа $\binom{1}{1}$. Суммируя "диагональные" компоненты ($i = j$), получим $V^j\omega_j$ — число, не зависящее от