произведению $\bar{V}(\tilde{p})\,\bar{W}(\tilde{q})$:

$$\bar{V} \otimes \bar{W}(\tilde{p}, \tilde{q}) \equiv \bar{V}(\tilde{p})\,\bar{W}(\tilde{q}). \tag{2.30}$$

Операция $\otimes$ называется *тензорным* (или *внешним*) *произведением.* Её обобщение на случай произвольного числа тензоров произвольного типа очевидно. Тензорным произведением тензора типа $\binom{N}{M}$ и тензора типа $\binom{N'}{M'}$ будет тензор типа $\binom{N+N'}{M+M'}$.

Компонентами тензора называются его значения на базисных векторах и один-формах. Скажем, если S — тензор типа $\binom{3}{2}$, то его компоненты относительно базиса $\{\bar{e}_i\}$ имеют вид

$$\blacklozenge \quad S^{ijk}{}_{lm} \equiv \mathsf{S}(\tilde{\omega}^i, \tilde{\omega}^j, \tilde{\omega}^k; \bar{e}_l, \bar{e}_m). \tag{2.31}$$

Если порядок аргументов тензора S существенен, то существенным является и порядок индексов у компонент $S^{ijk}{}_{lm}$.

Обобщение понятия компоненты на тензорные поля и определение дифференцируемости тензорных полей совершенно аналогичны случаю один-форм (см. § 2.20).

Упражнение 2.5. (a) Докажите, что общий тензор типа $\binom{2}{0}$ нельзя представить в виде тензорного произведения двух векторов. (Указание: подсчитайте число компонент тензора типа $\binom{2}{0}$.)

(b) Докажите, что тензор $\bar{V} \otimes \tilde{\omega}$ типа $\binom{1}{1}$ имеет компоненты $V^i\omega_j$.

Упражнение 2.6. Докажите, что тензоры типа $\binom{2}{0}$ в точке P образуют векторное пространство относительно сложения, определённого аналогично (2.16b). Докажите, что тензоры $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ образуют базис этого пространства. (Таким образом, хотя общий тензор типа $\binom{2}{0}$ и не представляется в виде тензорного произведения, он представляется в виде *линейной комбинации* тензорных произведений.) Это векторное пространство обозначается через $T_P \otimes T_P$.

2.25. СВЁРТКА

Как было указано в упр. 2.5, величины $\{V^i\omega_j\}$ являются компонентами тензора типа $\binom{1}{1}$. Суммируя "диагональные" компоненты ($i = j$), получим $V^j\omega_j$ — число, не зависящее от базиса, а именно значение $\tilde{\omega}$ на $\overline{V}$, которое можно считать тензором типа $\binom{0}{0}$. Аналогично, если $S^i{}_{jk}$ и P^{lm} — компоненты тензоров типа $\binom{1}{2}$ и $\binom{2}{0}$ соответственно, то $S^i{}_{jk}P^{lm}$ суть компоненты тензора типа $\binom{3}{2}$, $S^i{}_{jk}P^{jm}$ — компоненты тензора типа $\binom{2}{1}$, $S^i{}_{jk}P^{lj}$ — компоненты другого тензора типа $\binom{2}{1}$ и т. д. По аналогии с формулой (2.27) эта операция называется *свёрткой*; она позволяет получать новые тензоры из уже имеющихся.

Дадим доказательство независимости свёртки от выбора базиса. Рассмотрим тензор **A** типа $\binom{2}{0}$, тензор **B** типа $\binom{0}{2}$ и их свёртку (относительно некоторого базиса) $A^{ij}B_{jk}$. Мы утверждаем, что это — компоненты тензора **C** типа $\binom{1}{1}$, такого что для произвольных вектора $\overline{V}$ и один-формы $\tilde{\sigma}$

$$\mathbf{C}(\tilde{\sigma}; \overline{V}) = \Bigl(\sum_j A^{ij}B_{jk}\Bigr)\sigma_i V^k = \sum \mathbf{A}(\tilde{\sigma}, \tilde{\omega}^j)\,\mathbf{B}(\bar{e}_j, \overline{V}).$$

В силу линейности **A** по второму аргументу это можно переписать в виде

$$\mathbf{C}(\tilde{\sigma}; \overline{V}) = \mathbf{A}\Bigl(\tilde{\sigma}, \sum_j \mathbf{B}(\bar{e}_j, \overline{V})\,\tilde{\omega}^j\Bigr),$$

так как величины $\mathbf{B}(\bar{e}_j, \overline{V})$ суть просто числа. Но в § 2.20 мы по сути дела доказали, что независимо от выбора базиса

$$\sum_j (\bar{e}_j, \overline{V})\,\tilde{\omega}^j = B(\ \ , \overline{V}),$$

где правая часть является один-формой (при фиксированном $\overline{V}$) — на пустое место нужно подставлять вектор. Эта один-форма стоит в качестве одного из аргументов в **A**, так что

$$A^{ij}\,B_{jk} = C^i{}_k \Longleftrightarrow \mathbf{C}(\tilde{\sigma};\ \overline{V}) = \mathbf{A}(\tilde{\sigma}, \mathbf{B}(\ \ , \overline{V})),$$

независимо от выбора базиса (см. упр. 2.8).

Упражнение 2.7. Сколько тензоров типа $\binom{2}{1}$ можно получить свёрткой по паре индексов из тензора $Q^{ijk}{}_{lm}$ типа $\binom{3}{2}$? Сколько тензоров типа $\binom{1}{0}$, если выполнить ещё одну свёртку?

Упражнение 2.8. Пусть **A** и **B** — два тензора типа $\binom{1}{1}$; будем рассматривать их как линейные функции от векторов со значениями в векторах: если $\bar{V}$ — вектор, то $\mathsf{A}(\bar{V})$ и $\mathsf{B}(\bar{V})$ — векторы. Покажите, что если определить $\mathsf{C}(\bar{V})$ равенством

$$\mathsf{C}(\bar{V}) = \mathsf{B}(\mathsf{A}(\bar{V})),$$

то C — тоже тензор типа $\binom{1}{1}$. Покажите, что его компоненты имеют вид

$$C^i_j = B^i_k A^k_j.$$

Выясните связь всего этого с линейными преобразованиями (см. § 1.6).

2.26. ЗАМЕНА БАЗИСА

В фокусе старого определения тензора — поведение компонент тензора при замене базиса. Это определение было позднее заменено на то, которое мы привели выше; насколько же далеки друг от друга эти две концепции, раз мы только сейчас дошли до замен базиса! Нельзя сказать, чтобы преобразования компонент тензора при замене базиса были не важны. В большинстве практических вычислений с тензорами используются их компоненты, и необходимо понимать, как они преобразуются.

Рассмотрим векторы и тензоры, определённые в некоторой точке P многообразия M. Пусть у нас был один базис векторов $\{\bar{e}_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ и мы хотим перейти от него к другому базису $\{\bar{e}_{j'}, j' = 1, \ldots, n\}$. (Штрихи у индексов будут служить признаком, позволяющим отличить то, что относится к одному базису, от того, что относится к другому.) Тогда в T_P возникает линейное преобразование Λ от старого базиса к новому:

$$\bar{e}_{j'} = \Lambda^i{}_{j'} \bar{e}_i. \qquad (2.32)$$

Матрица $\Lambda^i{}_{j'}$ невырожденна (иначе векторы $\{e_{j'}\}$ были бы линейно-зависимы), а в остальном произвольна. Это не есть набор компонент какого-либо тензора, поскольку индексы относятся к двум различным базисам. Эта матрица называется *матрицей преобразования.*

Старый базис один-форм удовлетворяет условию (2.23):

$$\tilde{\omega}^i(\bar{e}_k) = \delta^i{}_k.$$

Умножая на $\Lambda^k{}_{j'}$ и используя (2.32), получаем в силу линейности один-форм

$$\tilde{\omega}^i(\bar{e}_{j'}) = \delta^i{}_k \Lambda^k{}_{j'} = \Lambda^i{}_{j'}. \qquad (2.33)$$