торов со значениями в векторах: если $\bar{V}$ — вектор, то $\mathsf{A}(\bar{V})$ и $\mathsf{B}(\bar{V})$ — векторы. Покажите, что если определить $\mathsf{C}(\bar{V})$ равенством

$$\mathsf{C}(\bar{V}) = \mathsf{B}(\mathsf{A}(\bar{V})),$$

то C — тоже тензор типа $\binom{1}{1}$. Покажите, что его компоненты имеют вид

$$C^i_j = B^i_k A^k_j.$$

Выясните связь всего этого с линейными преобразованиями (см. § 1.6).

2.26. ЗАМЕНА БАЗИСА

В фокусе старого определения тензора — поведение компонент тензора при замене базиса. Это определение было позднее заменено на то, которое мы привели выше; насколько же далеки друг от друга эти две концепции, раз мы только сейчас дошли до замен базиса! Нельзя сказать, чтобы преобразования компонент тензора при замене базиса были не важны. В большинстве практических вычислений с тензорами используются их компоненты, и необходимо понимать, как они преобразуются.

Рассмотрим векторы и тензоры, определённые в некоторой точке P многообразия M. Пусть у нас был один базис векторов $\{\bar{e}_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ и мы хотим перейти от него к другому базису $\{\bar{e}_{j'}, j' = 1, \ldots, n\}$. (Штрихи у индексов будут служить признаком, позволяющим отличить то, что относится к одному базису, от того, что относится к другому.) Тогда в T_P возникает линейное преобразование Λ от старого базиса к новому:

$$\bar{e}_{j'} = \Lambda^i{}_{j'}\bar{e}_i. \tag{2.32}$$

Матрица $\Lambda^i{}_{j'}$ невырожденна (иначе векторы $\{e_{j'}\}$ были бы линейно-зависимы), а в остальном произвольна. Это не есть набор компонент какого-либо тензора, поскольку индексы относятся к двум различным базисам. Эта матрица называется *матрицей преобразования*.

Старый базис один-форм удовлетворяет условию (2.23):

$$\tilde{\omega}^i(\bar{e}_k) = \delta^i{}_k.$$

Умножая на $\Lambda^k{}_{j'}$ и используя (2.32), получаем в силу линейности один-форм

$$\tilde{\omega}^i(\bar{e}_{j'}) = \delta^i{}_k\Lambda^k{}_{j'} = \Lambda^i{}_{j'}. \tag{2.33}$$

Далее, матрица $\Lambda^i{}_{j'}$ обратима. Обозначим обратную матрицу через $\Lambda^{k'}{}_j$:

$$\Lambda^{k'}{}_j \Lambda^j{}_{i'} = \delta^{k'}{}_{i'}, \quad \Lambda^{k'}{}_i \Lambda^i{}_{k'} = \delta^i{}_j, \tag{2.34}$$

Умножая (2.33) на $\Lambda^{k'}{}_j$, получим

$$\Lambda^{k'}{}_i \tilde{\omega}^i (\bar{e}_{j'}) = \delta^{k'}{}_{j'};$$

сравнивая с (2.33), заключаем, что

$$\blacklozenge \qquad \tilde{\omega}^{k'} = \Lambda^{k'}{}_i \tilde{\omega}^i. \tag{2.35}$$

Эта формула двойственна формуле (2.32): базисные один-формы преобразуются по закону, *противоположному* закону преобразования базисных векторов (противоположному в том смысле, что используется матрица, обратная к матрице преобразования); тогда в обоих базисах выполняется соотношение (2.23).

Теперь уже совсем просто найти, как преобразуются компоненты:

$$V^{i'} = \tilde{\omega}^{i'} (\bar{V}) = \Lambda^{i'}{}_j \tilde{\omega}^j (\bar{V}) = \Lambda^{i'}{}_j V^j, \tag{2.36}$$

$$q_{k'} = \tilde{q} (\bar{e}_{k'}) = \tilde{q}(\Lambda^j{}_{k'} \bar{e}_j) = \Lambda^j{}_{k'} \tilde{q} (\bar{e}_j) = \Lambda^j{}_{k'} q_j \tag{2.37}$$

и аналогично для тензоров более высокого «ранга» (см. упр. 2.9 ниже). Мы видим, что компоненты векторов и базисные один-формы преобразуются по *одному и тому же* закону, который противоположен (т. е. использует обратную матрицу) закону, по которому преобразуются компоненты один-форм и базисные векторы. Это и понятно, так как суммы вида $V^i \bar{e}_i$, $V^j \tilde{\sigma}_j$ и т. д. не должны зависеть от базиса. Это демонстрирует ещё одно преимущество наших правил расположения индексов и нашего правила суммирования: расположение индексов автоматически определяет закон преобразования. Например, V^i и $\tilde{\omega}^j$ подчиняются одному закону преобразования, а именно

$$V^{i'} = \Lambda^{i'}{}_j V^j.$$

Матрицу $\Lambda^i{}_{j'}$ здесь *не поставишь*, так как суммирование должно вестись по нештрихованному индексу, который должен появляться один раз вверху и один раз внизу.

Эти взаимно противоположные законы преобразования в более старой литературе именуются «контравариантными» и «ковариантными». То, что мы называем просто векторами, раньше называли «контравариантными векторами», поскольку закон преобразования их компонент противоположен («контра»!) закону преобразования базисных векторов. Аналогично один-формы назывались «ковариантными векторами», поскольку их компоненты преобразуются так же, как базисные векторы. При современном изложении подчёркивается тот факт, что ни векторы, ни один-формы не меняются при замене базиса; это геометрические объекты, не зависящие от выбора системы координат. Итак, от использования старых названий в современной терминологии отказались потому, что в них делается чрезмерно сильный акцент на описаниях, зависящих от выбора системы координат.

Упражнение 2.9. Покажите, что у произвольного тензора типа $\binom{2}{0}$ компоненты преобразуются так же, как у тензорного произведения двух векторов, т. е.

$$T^{i'j'} = \Lambda^{i'}{}_k \Lambda^{j'}{}_l T^{kl}. \qquad (2.38)$$

Обобщите эту формулу на случай тензоров типа $\binom{N}{N'}$.

Упражнение 2.10. Покажите, что если у тензора все компоненты в некотором базисе равны нулю, то они равны нулю и в любом другом базисе (такой тензор является нулевой линейной функцией (см. § 2.22) и, естественно, называется *нулевым*). (Отсюда вытекает, что если компоненты двух тензоров в некотором базисе совпадают, то эти тензоры равны.)

Упражнение 2.11. Для данного базиса $\{\bar{e}_i\}$ векторного n-мерного пространства рассмотрим совокупность чисел $\{A^i{}_j,\ i,\ j = 1, \ldots, n\}$. Для любого другого базиса $\{\bar{e}_{j'}\}$, связанного с исходным матрицей перехода $\Lambda^i{}_{j'}$ построим совокупность чисел вида $A^{i'}{}_{k'} = \Lambda^{i'}{}_j \Lambda^l{}_{k'} A^j{}_l$. Докажите, что существует тензор $\mathbf{A}$, компоненты которого в базисе $\{\bar{e}_{j'}\}$ равны $A^{i'}{}_{k'}$. Из сказанного вытекает, что можно считать тензор просто *набором чисел* $A^i{}_j$, *преобразующихся по определённому закону*. Это другая форма того определения, которым мы пользуемся.

Особенно интересно рассмотреть эти преобразования базисов для случая, когда они происходят из координатных преобразований, о которых упоминалось в конце § 2.6. Пусть в области U многообразия M задана координатная система $\{x^i,\ i = 1, \ldots, n\}$; введём новые функции $\{y^{i'},\ i' = 1, \ldots, n\}$, задаваемые формулами

$$y^{i'} = f^{i'}(x^1, \ldots, x^n),\ i' = 1, \ldots, n, \qquad (2.39)$$

или, кратко, $y^{i'} = f^{i'}(x^j)$. Эти формулы задают преобразование координат, если определитель матрицы Якоби $\partial y^{i'}/\partial x^j$ не обращается в нуль в U. Данную точку $P \in U$ можно описать двумя различными совокупностями чисел: $\{x^i\}$ или $\{y^{i'}\}$. Равным образом в точке P имеются два различных координатных базиса: $\{\partial/\partial x^i\}$ и $\{\partial/\partial y^{i'}\}$. В силу цепного правила,

$$\frac{\partial}{\partial y^{i'}} = \frac{\partial x^j}{\partial y^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{2.40}$$

Сравнивая с (2.32), заключаем, что

$$\Lambda^i{}_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial y^{j'}}. \tag{2.41}$$

Аналогично, обратная матрица имеет вид

$$\Lambda^{k'}{}_j = \frac{\partial y^{k'}}{\partial x^j}, \tag{2.42}$$

как легко проверить, используя цепное правило для частных производных:

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^{j'}} \frac{\partial y^{j'}}{\partial x^k} = \frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta^i{}_k.$$

Важно уяснить, что (2.42) охватывает лишь некоторый специальный класс полей преобразований $\Lambda^{k'}{}_j$ в U. В каждой отдельной точке P из U можно произвольно выбрать все n^2 элементов $\Lambda^{k'}{}_j$ (лишь бы не обращался в нуль определитель), но этого нельзя сделать в целой окрестности точки P, поскольку из (2.42) вытекает, что

$$\partial \Lambda^{k'}{}_j / \partial x^l = \partial \Lambda^{k'}{}_l / \partial x^j, \tag{2.43}$$

а это равенство вовсе не обязано выполняться для *произвольного* поля $\Lambda^{k'}{}_j$. Это — новая иллюстрация того, что не каждый набор базисных векторных полей является координатным.

2.27. ТЕНЗОРНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД КОМПОНЕНТАМИ

Пусть тензор T в некотором базисе имеет компоненты $\{\mathsf{T}^{i\cdots}{}_{j\ldots}\}$. Умножив эти компоненты на число a, получим $\{a\mathsf{T}^{i\cdots}{}_{j\ldots}\}$. Ясно, что это — компоненты тензора $a\,\mathsf{T}$; отсюда вытекает, что операция умножения всех компонент T на a *инвариантна относительно замены базиса*: начни мы вычислять в других координатах $\{y^i\}$, мы всё равно получили бы компоненты тензора $a\,\mathsf{T}$ в этих новых координатах. (Если бы мы умножили на a лишь *некоторые* из компонент $\{\mathsf{T}^{i\cdots}{}_{j\ldots}\}$, то указанная инвариантность уже не имела бы места.) Таким образом, операция $\{\mathsf{T}^{i\cdots}{}_{j\ldots}\} \mapsto \{a\mathsf{T}^{i\cdots}{}_{j\ldots}\}$ в точности соот-