обращается в нуль в U. Данную точку $P \in U$ можно описать двумя различными совокупностями чисел: $\{x^i\}$ или $\{y^{i'}\}$. Равным образом в точке P имеются два различных координатных базиса: $\{\partial/\partial x^i\}$ и $\{\partial/\partial y^{i'}\}$. В силу цепного правила,

$$\frac{\partial}{\partial y^{i'}} = \frac{\partial x^j}{\partial y^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{2.40}$$

Сравнивая с (2.32), заключаем, что

$$\Lambda^i{}_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial y^{j'}}. \tag{2.41}$$

Аналогично, обратная матрица имеет вид

$$\Lambda^{k'}{}_j = \frac{\partial y^{k'}}{\partial x^j}, \tag{2.42}$$

как легко проверить, используя цепное правило для частных производных:

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^{j'}} \frac{\partial y^{j'}}{\partial x^k} = \frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta^i{}_k.$$

Важно уяснить, что (2.42) охватывает лишь некоторый специальный класс полей преобразований $\Lambda^{k'}{}_j$ в U. В каждой отдельной точке P из U можно произвольно выбрать все n^2 элементов $\Lambda^{k'}{}_j$ (лишь бы не обращался в нуль определитель), но этого нельзя сделать в целой окрестности точки P, поскольку из (2.42) вытекает, что

$$\partial \Lambda^{k'}{}_j / \partial x^l = \partial \Lambda^{k'}{}_l / \partial x^j, \tag{2.43}$$

а это равенство вовсе не обязано выполняться для *произвольного* поля $\Lambda^{k'}{}_j$. Это — новая иллюстрация того, что не каждый набор базисных векторных полей является координатным.

2.27. ТЕНЗОРНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД КОМПОНЕНТАМИ

Пусть тензор T в некотором базисе имеет компоненты $\mathsf{T}^{i\cdots}{}_{j\ldots}\}$. Умножив эти компоненты на число a, получим $a\mathsf{T}^{i\cdots}{}_{j\ldots}\}$. Ясно, что это — компоненты тензора $a\,\mathsf{T}$; отсюда вытекает, что операция умножения всех компонент T на a *инвариантна относительно замены базиса*: начни мы вычислять в других координатах $\{y^i\}$, мы всё равно получили бы компоненты тензора $a\,\mathsf{T}$ в этих новых координатах. (Если бы мы умножили на a лишь *некоторые* из компонент $\{\mathsf{T}^{i\cdots}{}_{j\ldots}\}$, то указанная инвариантность уже не имела бы места.) Таким образом, операция $\{\mathsf{T}^{i\cdots}{}_{j\ldots}\} \mapsto \{a\mathsf{T}^{i\cdots}{}_{j\ldots}\}$ в точности соответствует инвариантной относительно выбора базиса операции $\mathbf{T} \mapsto a\,\mathbf{T}$. Аналогично операции взятия тензорного произведения двух тензоров

$$\mathbf{A},\ \mathbf{B} \mapsto \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$$

отвечает однозначно определённая операция над компонентами (см. упр. 2.4.)

$$\{A^{i\,\cdots}{}_{j\,\ldots}\},\ \{B^{k\,\cdots}{}_{l\,\ldots}\} \mapsto \{A^{i\,\cdots}{}_{j\,\ldots}B^{k\,\cdots}{}_{l\,\ldots}\}$$

(независимо от того, является ли используемый базис коорд. натным или некоординатным). Более общо, операция над компонентами, дающая компоненты *одного и того же* тензора, независимо от выбора базиса, называется *тензорной операцией*; далее мы будем иметь дело только с такими операциями. Приведём список алгебраических тензорных операций (дифференциальные тензорные операции мы рассмотрим попозже):

(i) сложение (и вычитание) компонент тензоров одинакового типа;
(ii) умножение всех компонент тензора на данное число (даёт тензор того же типа);
(iii) умножение компонент двух тензоров (даёт тензор, тип которого является «суммой» типов сомножителей);
(iv) свёртка по паре индексов, один из которых верхний, а другой — нижний.

Уравнения (равенства), в которых тензорные компоненты комбинируются только при помощи этих операций, называются *тензорными уравнениями* (*равенствами*). Из упр. 2.10 вытекает, что если в результате некоторой последовательности тензорной операции над компонентами в некотором базисе мы получили тензорное равенство, то это равенство будет уместно и во всех других базисах. Ввиду этого базис обычно выбирают из соображений удобства вычислений.

2.28. ФУНКЦИИ И СКАЛЯРЫ

Скаляры — это тензоры типа $\binom{0}{0}$, т. е. функции на многообразии, определение которых инвариантно относительно выбора базиса. Например, свёртка $V^i\omega_i$ — скаляр, поскольку её значение не зависит от выбора базиса, в котором производится вычисление. Наоборот, хотя компонента V^1 также является функцией на многообразии, у которой в каждой точке определено численное значение, она — не скаляр, поскольку это значение зависит от выбора базиса. Иначе говоря, суще-