ветствует инвариантной относительно выбора базиса операции $\mathbf{T} \mapsto a\,\mathbf{T}$. Аналогично операции взятия тензорного произведения двух тензоров

$$\mathbf{A},\ \mathbf{B} \mapsto \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$$

отвечает однозначно определённая операция над компонентами (см. упр. 2.4.)

$$\{A^{i\,\cdots}{}_{j\,\ldots}\},\ \{B^{k\,\cdots}{}_{l\,\ldots}\} \mapsto \{A^{i\,\cdots}{}_{j\,\ldots}B^{k\,\cdots}{}_{l\,\ldots}\}$$

(независимо от того, является ли используемый базис коорд. натным или некоординатным). Более общо, операция над компонентами, дающая компоненты *одного и того же* тензора, независимо от выбора базиса, называется *тензорной операцией*; далее мы будем иметь дело только с такими операциями. Приведём список алгебраических тензорных операций (дифференциальные тензорные операции мы рассмотрим попозже):

(i) сложение (и вычитание) компонент тензоров одинакового типа;
(ii) умножение всех компонент тензора на данное число (даёт тензор того же типа);
(iii) умножение компонент двух тензоров (даёт тензор, тип которого является «суммой» типов сомножителей);
(iv) свёртка по паре индексов, один из которых верхний, а другой — нижний.

Уравнения (равенства), в которых тензорные компоненты комбинируются только при помощи этих операций, называются *тензорными уравнениями* (*равенствами*). Из упр. 2.10 вытекает, что если в результате некоторой последовательности тензорной операции над компонентами в некотором базисе мы получили тензорное равенство, то это равенство будет уместно и во всех других базисах. Ввиду этого базис обычно выбирают из соображений удобства вычислений.

2.28. ФУНКЦИИ И СКАЛЯРЫ

Скаляры — это тензоры типа $\binom{0}{0}$, т. е. функции на многообразии, определение которых инвариантно относительно выбора базиса. Например, свёртка $V^i\omega_i$ — скаляр, поскольку её значение не зависит от выбора базиса, в котором производится вычисление. Наоборот, хотя компонента V^1 также является функцией на многообразии, у которой в каждой точке определено численное значение, она — не скаляр, поскольку это значение зависит от выбора базиса. Иначе говоря, существует некоторая (скалярная) функция $f(P)$, такая что $V^1(P) = f(P)$, где первая компонента (индекс 1) взята по отношению к некоторому заданному базису; если выбрать другой базис, то новая $V^1(P)$ не будет равняться $f(P)$. Таким образом, $f(P)$ есть скаляр, значение которого случайно оказалось равным первой компоненте поля V в некотором базисе. Но сама эта первая компонента V^1 не является скаляром, поскольку её значения зависят от выбора базиса. Итак, мы видим, что вопрос о том, является данная величина скаляром или же просто функцией, зависит от её интерпретации в смысле поведения при замене базиса, а не от её численных значений.

2.29. МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР В ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Наиболее часто в векторной алгебре рассматривается скалярное произведение между векторами (см. § 1.5). Это — правило, сопоставляющее число паре векторов. Это число линейно зависит от каждого из векторов. Значит, это есть тензор типа $\binom{0}{2}$; его называют *метрическим тензором* и обозначают через g. Итак, мы полагаем по определению

$$\mathrm{g}(\bar{V}, \bar{U}) = \mathrm{g}(\bar{U}, \bar{V}) \equiv \bar{U} \cdot \bar{V}. \tag{2.44}$$

Первое из этих равенств выражает требование, чтобы величина $\bar{U} \cdot \bar{V}$ не зависела от порядка сомножителей $\bar{U}$ и $\bar{V}$. Другими словами, g — симметрический тензор. Его компоненты в базисе $\{\bar{e}_i\}$ имеют вид

$$\mathrm{g}_{ij} = \mathrm{g}(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j. \tag{2.45}$$

Эти компоненты образуют симметричную матрицу размера $n \times n$. По причинам, которые будут объяснены ниже, мы требуем также, чтобы матрица была обратимой. Если окажется, что эта матрица единичная, т. е.

$$g_{ij} = \delta_{ij},$$

то метрический тензор называется *эвклидовой метрикой*, а векторное пространство — *эвклидовым пространством*. А как быть, если g_{ij} не имеет такого простого вида? Всегда можно попытаться выбрать новый базис $\{\bar{e}_{j'}\}$, в котором новые компоненты

$$g_{i'j'} = \Lambda^k{}_{i'} \Lambda^l{}_{j'} g_{kl} \tag{2.46}$$

принимают наиболее простой вид. Рассмотрим это соотношение как матричное уравнение. А именно перепишем его в виде

$$g_{i'j'} = \Lambda^k{}_{i'} g_{kl} \Lambda^l{}_{j'}.$$