ствует некоторая (скалярная) функция $f(P)$, такая что $V^1(P) = f(P)$, где первая компонента (индекс 1) взята по отношению к некоторому заданному базису; если выбрать другой базис, то новая $V^1(P)$ не будет равняться $f(P)$. Таким образом, $f(P)$ есть скаляр, значение которого случайно оказалось равным первой компоненте поля V в некотором базисе. Но сама эта первая компонента V^1 не является скаляром, поскольку её значения зависят от выбора базиса. Итак, мы видим, что вопрос о том, является данная величина скаляром или же просто функцией, зависит от её интерпретации в смысле поведения при замене базиса, а не от её численных значений.

2.29. МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР В ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Наиболее часто в векторной алгебре рассматривается скалярное произведение между векторами (см. § 1.5). Это — правило, сопоставляющее число паре векторов. Это число линейно зависит от каждого из векторов. Значит, это есть тензор типа $\binom{0}{2}$; его называют *метрическим тензором* и обозначают через g. Итак, мы полагаем по определению

$$\mathrm{g}(\bar{V}, \bar{U}) = \mathrm{g}(\bar{U}, \bar{V}) \equiv \bar{U} \cdot \bar{V}. \tag{2.44}$$

Первое из этих равенств выражает требование, чтобы величина $\bar{U} \cdot \bar{V}$ не зависела от порядка сомножителей $\bar{U}$ и $\bar{V}$. Другими словами, g — симметрический тензор. Его компоненты в базисе $\{\bar{e}_i\}$ имеют вид

$$\mathrm{g}_{ij} = \mathrm{g}(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j. \tag{2.45}$$

Эти компоненты образуют симметричную матрицу размера $n \times n$. По причинам, которые будут объяснены ниже, мы требуем также, чтобы матрица была обратимой. Если окажется, что эта матрица единичная, т. е.

$$g_{ij} = \delta_{ij},$$

то метрический тензор называется *эвклидовой метрикой*, а векторное пространство — *эвклидовым пространством*. А как быть, если g_{ij} не имеет такого простого вида? Всегда можно попытаться выбрать новый базис $\{\bar{e}_{j'}\}$, в котором новые компоненты

$$g_{i'j'} = \Lambda^k{}_{i'} \Lambda^l{}_{j'} g_{kl} \tag{2.46}$$

принимают наиболее простой вид. Рассмотрим это соотношение как матричное уравнение. А именно перепишем его в виде

$$g_{i'j'} = \Lambda^k{}_{i'} g_{kl} \Lambda^l{}_{j'}.$$

Из результатов § 1.6 ясно, что это — матричное уравнение

$$g' = \Lambda^{\mathrm{T}} g \Lambda, \tag{2.47}$$

где Λ^{T} — матрица, транспонированная к матрице $\Lambda = (\Lambda^{k}{}_{l'})$. Покажем, что если с умом выбрать матрицу Λ, то матрицу g' можно привести к весьма простому виду. Возьмём Λ в виде

$$\Lambda = OD, \tag{2.48}$$

где O — ортогональная матрица ($O^{\mathrm{T}} = O^{-1}$), а D — *диагональная* матрица (так что, в частности, $D^{\mathrm{T}} = D$). Из (1.41) вытекает, что

$$\Lambda^{\mathrm{T}} = (OD)^{\mathrm{T}} = D^{\mathrm{T}} O^{\mathrm{T}} = DO^{-1}$$

и

$$g' = DO^{-1} gOD. \tag{2.49}$$

Хорошо известно, что любую симметричную матрицу, и в частности g, можно привести к диагональному виду g_{d} преобразованием подобия, осуществляемым при помощи ортогональной матрицы; вот и возьмём в качестве O такую ортогональную матрицу:

$$g_{\mathrm{d}} = O^{-1} gO,$$

$$g' = Dg_{\mathrm{d}} D.$$

Если $g_{\mathrm{d}} = \mathrm{diag}(g_1, \ldots, g_n)$ и наша пока ещё не определённая матрица D равна $\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, то

$$g' = \mathrm{diag}(g_1 d_1^2, g_2 d_2^2, \ldots, g_n d_n^2). \tag{2.50}$$

Положим теперь $d_j = (|g_j|)^{-1/2}$, так что каждый элемент диагональной матрицы g' равен $+1$ или -1. При помощи d_j можно изменять лишь величины диагональных элементов g_j, но не их знаки. Далее, диагональные элементы матрицы g_{d} являются *собственными числами* матрицы g и определены однозначно с точностью до порядка. Более того, поскольку матрица g обратима, ни одно из этих собственных чисел не равно нулю. Если выбрать матрицу O так, чтобы сначала шли отрицательные собственные значения, то мы приходим к следующей теореме: *любое векторное пространство с метрическим тензором обладает базисом, в котором этот тензор представляется в каноническом виде* $\mathrm{diag}(-1, \ldots, -1, 1, \ldots, 1)$. Такой базис называется *ортонормированным*. Сумма этих диагональных элементов — след матрицы канонического представления — называется *сигнатурой* метрики.

Упражнение 2.12. Найдите матрицы Λ, приводящие следующие матрицы к диагональной форме:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Доказанная теорема очень важна. Из неё вытекает, что имеется лишь весьма малое число различных типов метрических тензоров в данном векторном пространстве. Если метрика положительно-определённа, то в её канонической форме всюду стоят $+1$ и пространство является эвклидовым. Если метрика отрицательно-определённа, то она тоже называется эвклидовой, так как существенно важно лишь то, одинаковы все знаки или нет. Если не все знаки одинаковы, то метрика называется *индефинитной*. Важный пример — каноническая форма $(-1, 1, \ldots, 1)$; такая метрика называется обычно *метрикой Минковского*; такова метрика пространства специальной теории относительности (размерности $n = 4$), которое мы вскоре рассмотрим более подробно.

Ещё одно следствие теоремы о приведении к каноническому виду — выделение одного привилегированного класса *базисов*, векторного пространства, а именно класса *ортонормированных* базисов. В эвклидовом пространстве E^n такие базисы называют *декартовыми*. В таком базисе метрический тензор имеет компоненты $g_{ij} = \delta_{ij}$, или, в матричном виде, $g = I$. Матрица преобразования Λ_{C} от одного такого базиса к другому такому же [1] удовлетворяет соотношению

$$I = \Lambda_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} I \Lambda_{\mathrm{C}}, \quad \text{или} \quad \Lambda_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} = \Lambda_{\mathrm{C}}^{-1}. \tag{2.51}$$

Таким образом, преобразования между декартовыми базисами задаются ортогональными матрицами. Эти матрицы образуют группу (произведение двух ортогональных матриц ортогонально), называемую ортогональной группой и обозначаемую через $O(n)$.

Аналогичным образом в пространстве с метрикой Минковского выделены псевдоэвклидовы (или *лоренцевы*) базисы, в которых компоненты метрики образуют матрицу вида

$$\eta = \operatorname{diag}(-1, 1, \ldots, 1). \tag{2.52}$$

Матрица перехода Λ_{L} от одного псевдоэвклидова базиса к другому [2] удовлетворяет соотношению

$$\eta = \Lambda_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}} \eta \Lambda_{\mathrm{L}}. \tag{2.53}$$

Такие преобразования называются *преобразованиями Лоренца*. Нетрудно показать, что они также образуют группу, называемую *группой Лоренца* и обозначаемую $L(n)$ или $O(n-1, 1)$.

С точки зрения тензорной алгебры наиболее важная роль метрических тензоров, о которой мы ещё не упоминали, — это то, что они устанавливают взаимно-однозначное соответ-

[1] Индекс C — от Cartesian (декартов). — *Прим. ред.*
[2] Индекс L — от Lorentz. — *Прим. ред.*

ствие между векторами и один-формами. Фиксируем какой-нибудь вектор $\bar{V}$. Тогда $\mathrm{g}(\bar{V},\ )$ является при этом фиксированном $\bar{V}$ вещественнозначной линейной функцией от векторов, т. е. один-формой. Обозначим её через $\tilde{V}$:

$$\tilde{V} = \mathrm{g}(\bar{V},\ ). \tag{2.54}$$

Невырожденность матрицы g_{ij}, которую мы потребовали выше, гарантирует взаимную однозначность этого отображения: имеется только один вектор $\bar{V}$, который переходит в $\tilde{V}$. Чтобы убедиться в этом, запишем последнее равенство в компонентах. Обозначим компоненты $\tilde{V}$ через V_i. Тогда

$$\begin{aligned} V_i = \tilde{V}(\bar{e}_i) = \mathrm{g}(\bar{V}, \bar{e}_i) = \mathrm{g}(V^j\bar{e}_j, e_i) \\ = V^j \mathrm{g}(\bar{e}_j, \bar{e}_i) = V^j g_{ji} = g_{ij}V^j \end{aligned}$$

(последнее равенство вытекает из симметричности g). Обозначим через g^{ij} матрицу, обратную к g_{ij}:

◆ $$g^{ij}g_{jk} = \delta^i{}_k. \tag{2.55}$$

Имеем

$$g^{ki}V_i = g^{ki}g_{ij}V^j = \delta^k{}_jV^j = V^k, \tag{2.56}$$

откуда и вытекает обратимость отображения $\bar{V} \mapsto \tilde{V}$. Итак, метрика позволяет однозначно отождествить векторы с один-формами. Соответствие между «отождествляемыми» вектором и один-формой выражается так:

◆ $$V_i = g_{ij}V^j, \tag{2.57}$$

◆ $$V^i = g^{ik}V_k. \tag{2.58}$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. То что мы обозначили элементы обратной матрицы через g^{ij}, позволило нам записать тензорное равенство (2.58), следуя обычным правилам суммирования. Но для полноты следует показать, что величины g^{ij} действительно образуют компоненты тензора типа $\binom{2}{0}$. Это и составляет содержание следующего упражнения.

Упражнение 2.13. (a) Покажите, что $\{g^{ij}\}$ суть компоненты некоторого тензора g^{-1} типа $\binom{2}{0}$, — либо удостоверившись, что они преобразуются должным образом при замене базиса, либо установив, что они определяют билинейную функцию на один-формах.

(b) Покажите, что если базис векторов $\{\bar{e}_i\}$ ортонормирован, то и дуальный базис один-форм $\{\tilde{\omega}^i\}$ тоже ортонормирован, в том смысле, что $\mathrm{g}^{-1}(\tilde{\omega}^i, \tilde{\omega}^j) = \pm\delta^{ij}$.

Аналогично с помощью метрики можно превратить любой тензор **A** типа $\binom{2}{0}$ в тензор типа $\binom{1}{1}$:

$$A^l{}_j = g_{jk}A^{lk}. \tag{2.59}$$

Этот тензор в свою очередь можно превратить в тензор типа $\binom{0}{2}$:

$$A_{lj} = g_{lm}A^m{}_j = g_{lm}g_{jk}A^{mk}, \tag{2.60}$$

а от него вернуться к исходному тензору

$$A^{lk} = g^{il}g^{km}A_{lm}. \tag{2.61}$$

Эти преобразования называются *операциями поднятия* и *опускания индексов*; принято обозначать все эти тензоры одной и той же буквой (например, **A**), различая их между собой только расположением индексов у компонент. В векторном пространстве с метрикой иногда бывает неважно, имеет тензор тип $\binom{N}{N'}$, или $\binom{N-1}{N'+1}$, или $\binom{N+1}{N'-1}$ и т. д.; всё определяется в таком случае числом $N+N'$, которое называется *рангом* тензора.

В эвклидовом пространстве в декартовом базисе $g_{ij} = \delta_{ij}$, так что $g^{ij} = \delta^{ij}$ и $V^i = V_i$ — между компонентами вектора и ассоциированной с ним один-формы нет никакой разницы. Именно этим объясняется то, почему в элементарных курсах эвклидовой векторной алгебры не делается различия между векторами и один-формами, а также то, почему в таких курсах ограничиваются ортонормированными базисами. Но в неортонормированном базисе в эвклидовом пространстве и в *любом* базисе в пространстве с индефинитной метрикой компоненты один-формы могут быть совсем отличными от компонент соответствующего вектора. Интересный пример такой ситуации встретится нам в § 2.31, посвящённом специальной теории относительности.

2.30. ПОЛЕ МЕТРИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА НА МНОГООБРАЗИИ

Метрическое тензорное поле $\mathfrak{g}$ на многообразии — это симметрическое тензорное поле типа $\binom{0}{2}$, обратимое в каждой точке. В каждой точке P оно задает метрику в касательном пространстве T_P, для которой справедливы все свойства, обсуждавшиеся в предыдущем параграфе. Но оно задаёт ещё много сверх того.