против, двумерная внутренность кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями в R^2, *может* быть покрыта одной координатной системой. Попробуйте её найти!

2.3. ДРУГИЕ ПРИМЕРЫ МНОГООБРАЗИЙ

Полезность понятия многообразия заключается в его общности: многообразиями оказываются такие множества, которые, не будь этого понятия, никому бы и в голову не пришло считать пространствами. По определению *любое* множество M, допускающее непрерывную параметризацию, является многообразием, размерность которого равна числу независимых параметров. Например:

(i) Совокупность всех вращений твёрдого тела в трёхмерном пространстве является многообразием, поскольку она может быть непрерывно параметризована тремя «углами Эйлера» (см. Goldstein, 1950).

(ii) Совокупность всех лоренцевых преобразований, задаваемых переходом к движущейся системе отсчета, устроена как трёхмерное многообразие: параметрами служат три компоненты скорости движения.

(iii) Для N частиц величины, определяющие их положения ($3N$ величин) и скорости ($3N$ величин), задают точку в $6N$-мерном многообразии, называемом фазовым пространством.

(iv) Если задано уравнение (алгебраическое или дифференциальное) для величины y как функции от независимой переменной x, то можно ввести структуру многообразия на множестве *всех* пар (y, x): каждое частное решение есть кривая на этом многообразии. Этот пример легко обобщается на случай произвольного числа зависимых и независимых переменных.

(v) Особенно часто встречающимся примером многообразия служит векторное пространство, определение которого было дано в § 1.5. (Мы рассматриваем здесь лишь векторные пространства над вещественными числами.) Для того чтобы убедиться в том, что векторное пространство является многообразием, построим отображение его в некоторое R^n. Пусть векторное пространство n-мерно, выберем в нём произвольный базис $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$. Тогда любой вектор $\bar{y}$ представляется в виде линейной комбинации

$$\bar{y} = a_1\bar{e}_1 + \ldots + a_n\bar{e}_n. \tag{2.1}$$

Но $\bar{y}$ есть точка V; тем самым установлено отображение из V в R^n, $\bar{y} \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$. На самом деле каждой точке из R^n отвечает при этом отображении единственный вектор из V, так что V не только целиком покрывается одной координатной системой, которую мы построили, но просто совпадает как многообразие с R^n. На языке теории групп (§ 1.4) V и R^n изоморфны. Это важный результат. Он означает, что каждое векторное пространство можно, когда это удобно, считать просто пространством R^n.

(vi) Разобранный выше пример (i) служит примером группы Ли, определение которой мы теперь в состоянии дать. *Группа Ли* G — это группа, являющаяся к тому же C^∞-многообразием, причём групповая операция должна индуцировать C^∞-отображение этого многообразия в себя. Это означает следующее. Возьмём любой элемент a группы. Этот элемент индуцирует отображение G в себя, при котором любой элемент b из G переходит в ba, $b \mapsto ba$. Требуется, чтобы это отображение было отображением класса C^∞; на координатном языке это означает, что координаты точки ba должны быть C^∞-функциями от координат точки b. В действительности это требование есть требование согласованности: оно гарантирует согласованность структуры многообразия с групповой структурой. В примере (i) совокупность всех вращений твёрдого тела образует группу: нетрудно показать, что её групповая структура согласована со структурой трёхмерного многообразия. (Эта группа Ли называется группой $SO(3)$.) Данное определение группы Ли может показаться поначалу чересчур абстрактным и сухим: оно сделается более живым после того, как мы разберём свойства групп Ли в гл. 3. Простым примером группы Ли является R^n. Это — векторное пространство (см. пример (v) выше) и тем самым группа, а также и многообразие: фактически R^n служит простейшим примером группы Ли.

2.4. О СВОЙСТВАХ МНОГООБРАЗИЙ «В ЦЕЛОМ»

Поскольку каждое многообразие локально устроено как некоторое R^n, любые два многообразия одинаковой размерности (и одного класса гладкости) локально неразличимы на данном уровне дифференциальной геометрии. Ситуация в корне меняется при переходе к рассмотрению глобальных структур, как это видно из сопоставления S^2 с R^2, проведенного в § 2.2. Следовательно, многообразия делятся на различные классы в соответствии с их глобальными свойствами. Например, поверхность сферы и поверхность мелка имеют одинаковую глобальную структуру. Хотя ни одну из них нельзя отобразить на R^2, для каждой имеется прекрасное 1-1-отображение на другую, как это показано на рис. 2.7. (Строго говоря, мелок должен иметь гладкие края для того, чтобы его поверхность можно было отождествить с S^2 как C^∞-многообразие.) Такое отображение непосредственно из