Аналогично с помощью метрики можно превратить любой тензор **A** типа $\binom{2}{0}$ в тензор типа $\binom{1}{1}$:

$$A^l{}_j = g_{jk}A^{lk}. \tag{2.59}$$

Этот тензор в свою очередь можно превратить в тензор типа $\binom{0}{2}$:

$$A_{lj} = g_{lm}A^m{}_j = g_{lm}g_{jk}A^{mk}, \tag{2.60}$$

а от него вернуться к исходному тензору

$$A^{lk} = g^{il}g^{km}A_{lm}. \tag{2.61}$$

Эти преобразования называются *операциями поднятия* и *опускания индексов*; принято обозначать все эти тензоры одной и той же буквой (например, **A**), различая их между собой только расположением индексов у компонент. В векторном пространстве с метрикой иногда бывает неважно, имеет тензор тип $\binom{N}{N'}$, или $\binom{N-1}{N'+1}$, или $\binom{N+1}{N'-1}$ и т. д.; всё определяется в таком случае числом $N+N'$, которое называется *рангом* тензора.

В эвклидовом пространстве в декартовом базисе $g_{ij} = \delta_{ij}$, так что $g^{ij} = \delta^{ij}$ и $V^i = V_i$ — между компонентами вектора и ассоциированной с ним один-формы нет никакой разницы. Именно этим объясняется то, почему в элементарных курсах эвклидовой векторной алгебры не делается различия между векторами и один-формами, а также то, почему в таких курсах ограничиваются ортонормированными базисами. Но в неортонормированном базисе в эвклидовом пространстве и в *любом* базисе в пространстве с индефинитной метрикой компоненты один-формы могут быть совсем отличными от компонент соответствующего вектора. Интересный пример такой ситуации встретится нам в § 2.31, посвящённом специальной теории относительности.

2.30. ПОЛЕ МЕТРИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА НА МНОГООБРАЗИИ

Метрическое тензорное поле $\mathbf{g}$ на многообразии — это симметрическое тензорное поле типа $\binom{0}{2}$, обратимое в каждой точке. В каждой точке P оно задает метрику в касательном пространстве T_P, для которой справедливы все свойства, обсуждавшиеся в предыдущем параграфе. Но оно задаёт ещё много сверх того.

Выделение некоторого тензорного поля типа $\binom{0}{2}$ на многообразии M в качестве его метрики снабжает M чрезвычайно богатой структурой. Многообразие сразу же делается «жёстким»; на нём становится возможным определить такие понятия, как расстояние (см. ниже) и кривизна (см. гл. 6). Эти понятия настолько важны для многих приложений, особенно для общей теории относительности, что всякий физик почти наверняка знаком с такого рода геометрией. Но с точки зрения дифференциальной геометрии эти понятия являются структурами «более высокого уровня»: выделяя определённое тензорное поле на особое положение, мы выходим за рамки «чистого» дифференцируемого многообразия. При таком подходе можно проглядеть богатую геометрическую структуру, которой обладает обычное многообразие. Такие важные вещи, как производные Ли и дифференциальные формы, не имеют никакого отношения к метрике. Соответственно мы будем стараться в этой книге всюду, где только можно, обойтись без привлечения метрического тензора, даже в приложениях к многообразиям, на которых он задан. В этом параграфе мы лишь коротко рассмотрим его простейшие свойства, а более подробное изучение метрической геометрии отложим до гл. 6.

Метрический тензор может быть дифференцируемым столько раз, сколько потребуется, но во всяком случае он должен быть непрерывным. Отсюда следует, что его канонический вид должен быть всюду одинаков, поскольку он определяется целочисленными параметрами, которые не могут меняться непрерывно. Поэтому можно говорить о *сигнатуре* поля $\mathfrak{g}$. Если допустить, что матрицу преобразования Λ можно выбирать в каждой точке независимо, то можно перейти от любого базиса векторных полей к глобально ортонормированному базису, в котором компоненты $\mathfrak{g}$ канонические. Но такое преобразование Λ не будет, вообще говоря, координатным (т. е. не будет удовлетворять (2.43)); на самом деле, в общем случае нельзя найти координатный базис, являющийся также ортонормированным в некоторой открытой области U многообразия M (см. упр. 2.14). Очевидным исключением является R^n, рассматриваемое как многообразие с эвклидовой метрикой δ_{ij} в каждой точке. Но даже и в этом случае только декартовы координаты задают ортонормированный базис. Соответствующий пример был дан в упр. 2.1, где были рассмотрены полярные координаты в R^2. Координатный базис ортогонален, но не нормирован. А если его нормировать, то он перестаёт быть координатным.

Упражнение 2.14. Покажите, что всякое метрическое тензорное поле $\mathfrak{g}$ класса C^∞ является *локально-плоским*, в том смысле, что в некоторой окрестности любой точки P существует система координат, в которой компоненты g_{ij} обладают следующими свойствами:

(i) $g_{ij}(P) = \pm\delta_{ij}$ (ортонормированность в точке P);

(ii) $\left.\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right|_P = 0$ (ортонормированность в первом приближении вблизи P);

(iii) $\left.\dfrac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}\right|_P$ необязательно все равны нулю (система координат, вообще говоря, не является подлинно ортонормированной).

Упражнение 2.15. Пусть на эвклидовой плоскости заданы полярные координаты. Найдите компоненты метрики

(a) в базисе $\{\partial/\partial r, \partial/\partial\theta\}$;

(b) в базисе $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ из упр. 2.1; выразите $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ через $\partial/\partial r$ и $\partial/\partial\theta$.

Упражнение 2.16. Найдите компоненты один-формы $\tilde{d}f$ и соответствующего ей вектора $\overline{d}f$ в обоих базисах из упр. 2.15.

Здесь следует сделать одно предостережение. В большинстве руководств, где излагается векторное исчисление в криволинейных координатах в эвклидовом пространстве, используются компоненты векторов в таких вот ортонормированных (но, вообще говоря, не координатных) базисах. Это позволяет не делать различия между векторами и один-формами. Но при сравнении выражений, которые мы получим ниже для, скажем, дивергенции векторного поля через его компоненты, с выражениями, приводимыми в других руководствах, следует иметь в виду возможное различие базисов.

Важным свойством метрики является то, что с её помощью можно определить понятие длины на многообразии. Если $\bar{V} = d\bar{x}/d\lambda$ — касательный вектор к данной кривой, то перемещению $d\lambda$ отвечает квадрат длины

$$\begin{aligned} dl^2 &\equiv d\bar{x}\cdot d\bar{x} = (\bar{V}d\lambda)\cdot(\bar{V}d\lambda) \\ &= \bar{V}\cdot\bar{V}(d\lambda)^2 = g(\bar{V}, \bar{V})\, d\lambda^2 \end{aligned} \tag{2.62}$$

(Здесь d — символ бесконечно малой величины, а не градиента.) Если метрика положительно-определённа, то $g(\bar{V}, \bar{V}) > 0$ для всех $\bar{V} \neq 0$. В этом случае dl^2 положительно, и мы имеем для элемента длины кривой выражение

$$dl = (g(\bar{V}, \bar{V}))^{1/2}\, d\lambda. \tag{2.63}$$

Однако в случае индефинитной метрики квадрат длины уже не имеет определённого знака. Кривые могут иметь как положительное dl^2 ("пространственно-подобные" кривые), так и отрицательное ("времени-подобные"). В таком случае можно считать вещественное число

$$dl = |g(\bar{V}, \bar{V})|^{1/2} d\lambda \tag{2.64}$$

"собственной длиной" для пространственно-подобных кривых и "собственным временем" для времени-подобных. Эта величина равна нулю для "нулевых" кривых. *При работе с индефинитной метрикой нужно следить за тем, чтобы не спутать вектор с нулевой длиной с вектором, равным нулю (имеющим нулевые компоненты).*

2.31. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Одним из важнейших для физики многообразий является векторное пространство R^4, снабжённое метрикой сигнатуры $+2$ и рассматриваемое как многообразие; это — *пространство Минковского*, пространство-время специальной теории относительности. В элементарных руководствах по специальной теории относительности часто не вводят явно метрический тензор, но в них содержится всё необходимое для того, чтобы его ввести. В частности, мы знаем, что имеется привилегированное семейство систем координат в пространстве-времени, называемых лоренцевыми системами отсчета, и что если два события разделены координатным интервалом $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ в такой системе отсчёта, то величина

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \tag{2.65}$$

не зависит от выбора лоренцевой системы отсчёта. (Здесь c — скорость света.) Изменим масштабы по осям координат, полагая $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. (В теории относительности общепринято нумеровать координаты, начиная с 0, а не с единицы.) Условимся также использовать для пространственно-временных индексов *греческие* буквы. Это поможет нам отличать выкладки, относящиеся только к теории относительности, от более общих. Тогда равенство (2.65) перепишется в виде

$$\Delta s^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = \eta_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta, \tag{2.66}$$

где $\eta_{\alpha\beta}$ — матрица вида

$$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1). \tag{2.67}$$

Мы будем считать величину (2.66) *псевдонормой* (§ 1.5) вектора $\Delta\bar{x}$ с компонентами $(\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3)$. Легко видеть, что эта псевдонорма удовлетворяет аксиомам (Nii) и (Niv) из