жительное $\mathrm{d}l^2$ ("пространственно-подобные" кривые), так и отрицательное ("времени-подобные"). В таком случае можно считать вещественное число

$$\mathrm{d}l = |\mathrm{g}(\bar{V}, \bar{V})|^{1/2}\,\mathrm{d}\lambda \tag{2.64}$$

"собственной длиной" для пространственно-подобных кривых и "собственным временем" для времени-подобных. Эта величина равна нулю для "нулевых" кривых. *При работе с индефинитной метрикой нужно следить за тем, чтобы не спутать вектор с нулевой длиной с вектором, равным нулю (имеющим нулевые компоненты).*

2.31. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Одним из важнейших для физики многообразий является векторное пространство R^4, снабжённое метрикой сигнатуры $+2$ и рассматриваемое как многообразие; это — *пространство Минковского*, пространство-время специальной теории относительности. В элементарных руководствах по специальной теории относительности часто не вводят явно метрический тензор, но в них содержится всё необходимое для того, чтобы его ввести. В частности, мы знаем, что имеется привилегированное семейство систем координат в пространстве-времени, называемых лоренцевыми системами отсчета, и что если два события разделены координатным интервалом $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ в такой системе отсчёта, то величина

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \tag{2.65}$$

не зависит от выбора лоренцевой системы отсчёта. (Здесь c — скорость света.) Изменим масштабы по осям координат, полагая $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. (В теории относительности общепринято нумеровать координаты, начиная с 0, а не с единицы.) Условимся также использовать для пространственно-временных индексов *греческие* буквы. Это поможет нам отличать выкладки, относящиеся только к теории относительности, от более общих. Тогда равенство (2.65) перепишется в виде

$$\Delta s^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = \eta_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta, \tag{2.66}$$

где $\eta_{\alpha\beta}$ — матрица вида

$$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1). \tag{2.67}$$

Мы будем считать величину (2.66) *псевдонормой* (§ 1.5) вектора $\Delta\bar{x}$ с компонентами $(\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3)$. Легко видеть, что эта псевдонорма удовлетворяет аксиомам (Nii) и (Niv) из

§ 1.5 и, значит, ей отвечает *скалярное произведение*. Последнее, очевидно, имеет вид

$$\bar{V}\cdot\bar{W}=\eta_{\alpha\beta}V^{\alpha}W^{\beta},\tag{2.68}$$

так что фактически $\eta_{\alpha\beta}$ есть метрический тензор, записанный в каноническом виде, а лоренцева система отсчёта есть соответствующий ортонормированный базис.

На примере этой метрики легко проиллюстрировать различие между компонентами вектора и ассоциированной с ним один-формы. В лоренцевой системе отсчета

$$U_0=\eta_{0\alpha}U^{\alpha}=-U^0,\tag{2.69a}$$

$$U_x=U^x,\quad U_y=U^y,\quad U_z=U^z.\tag{2.69b}$$

Рассмотрим *вектор-градиент* функции f — вектор, ассоциированный с один-формой $\tilde{d}f$. Градиент $\tilde{d}f$ имеет компоненты $(\partial f/\partial x^0, \partial f/\partial x^1, \ldots)$, а вектор-градиент $\bar{d}f$ — компоненты $(-\partial f/\partial x^0, \partial f/\partial x^1, \ldots)$. Во многих руководствах по специальной теории относительности градиент вводится как векторный оператор с компонентами $(-\partial/\partial x^0, \partial/\partial x^1, \ldots)$. Появление неестественного знака «минус» объясняется именно тем, что градиент в действительности является один-формой.

Многообразие M с метрикой $\mathbf{g}$ называется *пространством Минковского*, лишь если в нём существует глобальная система координат (покрывающая всё M), в которой компоненты $\mathbf{g}$ равны $\eta_{\alpha\beta}$. С этой системой координат особенно удобно работать, но она не является единственно возможной для M. С тем же успехом можно рассматривать и другие системы координат, например связанные с ускоряющимся наблюдателем. Если следовать общим правилам дифференциальной геометрии, то при этом будут получаться физически верные результаты.

2.32. БИБЛИОГРАФИЯ

По поводу более аккуратного и строгого обсуждения того, что́ понимается под многообразием, и в особенности по поводу важного понятия расслоенного пространства, см. Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette & M. Dillard-Bleick, Analysis, Manifolds, and Physics (North-Holland, Amsterdam, 1977). По поводу доказательства теоремы о неподвижной точке, использующего теорию когомологий, см. M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry (Publish or Perish, Boston, 1970), vol. 1, pp. 8—54 (после прочтения § 4.24 ниже!). Касательное расслоение и связанные с ним структуры обсуждаются также в книгах: R. Hermann, Vector Bundles in Mathematical Physics, two volumes (Benjamin, Reading, Mass., 1970); R. Abraham & J. E. Marsden, Foundations of Mechanics, 2nd ed. (Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1978). Обсуждение расслоенных пространств в контексте современных исследований по квантовой теории поля и гравитации можно найти в статье B. Carter, Underlying mathematical structure of classical gravitation theory, in: Recent Developments in Gravi-