§ 1.5 и, значит, ей отвечает *скалярное произведение*. Последнее, очевидно, имеет вид

$$\bar{V}\cdot\bar{W}=\eta_{\alpha\beta}V^{\alpha}W^{\beta}, \tag{2.68}$$

так что фактически $\eta_{\alpha\beta}$ есть метрический тензор, записанный в каноническом виде, а лоренцева система отсчёта есть соответствующий ортонормированный базис.

На примере этой метрики легко проиллюстрировать различие между компонентами вектора и ассоциированной с ним один-формы. В лоренцевой системе отсчета

$$U_0=\eta_{0\alpha}U^{\alpha}=-U^0, \tag{2.69a}$$

$$U_x=U^x,\quad U_y=U^y,\quad U_z=U^z. \tag{2.69b}$$

Рассмотрим *вектор-градиент* функции f — вектор, ассоциированный с один-формой $\tilde{d}f$. Градиент $\tilde{d}f$ имеет компоненты $(\partial f/\partial x^0, \partial f/\partial x^1, \ldots)$, а вектор-градиент $\bar{d}f$ — компоненты $(-\partial f/\partial x^0, \partial f/\partial x^1, \ldots)$. Во многих руководствах по специальной теории относительности градиент вводится как векторный оператор с компонентами $(-\partial/\partial x^0, \partial/\partial x^1, \ldots)$. Появление неестественного знака «минус» объясняется именно тем, что градиент в действительности является один-формой.

Многообразие M с метрикой $\mathbf{g}$ называется *пространством Минковского*, лишь если в нём существует глобальная система координат (покрывающая всё M), в которой компоненты $\mathbf{g}$ равны $\eta_{\alpha\beta}$. С этой системой координат особенно удобно работать, но она не является единственно возможной для M. С тем же успехом можно рассматривать и другие системы координат, например связанные с ускоряющимся наблюдателем. Если следовать общим правилам дифференциальной геометрии, то при этом будут получаться физически верные результаты.

2.32. БИБЛИОГРАФИЯ

По поводу более аккуратного и строгого обсуждения того, что́ понимается под многообразием, и в особенности по поводу важного понятия расслоенного пространства, см. Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette & M. Dillard-Bleick, Analysis, Manifolds, and Physics (North-Holland, Amsterdam, 1977). По поводу доказательства теоремы о неподвижной точке, использующего теорию когомологий, см. M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry (Publish or Perish, Boston, 1970), vol. 1, pp. 8—54 (после прочтения § 4.24 ниже!). Касательное расслоение и связанные с ним структуры обсуждаются также в книгах: R. Hermann, Vector Bundles in Mathematical Physics, two volumes (Benjamin, Reading, Mass., 1970); R. Abraham & J. E. Marsden, Foundations of Mechanics, 2nd ed. (Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1978). Обсуждение расслоенных пространств в контексте современных исследований по квантовой теории поля и гравитации можно найти в статье B. Carter, Underlying mathematical structure of classical gravitation theory, in: Recent Developments in Gravitation, ed. M. Levy & S. Deser (Plenum, New York, 1979). См. также статью A. Trautman, Rep. Math. Phys., 10, 297 (1976).

Функциональные пространства рассматриваются в Choquet-Bruhat et al., а также во многих других руководствах по функциональному анализу, например в книге: F. Riesz & B. Sz-Nagy, Functional Analysis (Ungar, New York, 1955) [имеется перевод: Секефальви-Надь Б., Рисс. Ф. Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979]. Теория обобщённых функций (дельта-функция Дирака и пр.) разбирается в книгах: Choquet-Bruhat et al. (1977); G. Friedlander, The Wave Equation on a Curved Space-Time (Cambridge Unicersity Press, 1976).

Результаты из матричной алгебры, используемые при приведении метрического тензора к каноническому виду, можно найти в книгах, указанных в гл. 1. Хорошим справочником по векторному анализу в криволинейных координатах в эвклидовом трёхмерном пространстве может служить книга W. Magnus & F. Oberhettinger, Functions of Mathematical Physics, ch. 9 (Chelsea, New York, 1949). Метрическая структура многообразия специальной теории относительности (пространства Минковского) описана на элементарном уровне в книге E. F. Taylor & J. A. Wheeler, Spacetime Physics (Freeman, San Francisco, 1963). Изложение этого вопроса, принадлежащее самому Минковскому, см. в The Principle of Relativity edited and translated by W. Perrett & G. B. Jeffrey (Dover, New York, 1924). В качестве примера руководства, где градиенты в специальной теории относительности обсуждаются без помощи один-форм, сошлёмся на «Фейнмановские лекции по физике» (The Feynman Lectures on Physics, R. P. Feynman, R. B. Leighton & M. Sands, vol. 2, § 25-3 (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950) [имеется перевод: Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М., Фейнмановские лекции по физике, вып. 6. — М.: Мир, 1977].

Углы Эйлера и другие параметризации на группе вращений подробно разобраны в книге H. Goldstein, Classical Mechanics (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950) [имеется перевод: Голдстейн Г. Классическая механика. 2-е изд. — М.: Наука, 1975]. Для изучающего предмет будет полезным сопоставить изложение Голдстейна с нашим анализом группы вращений в гл. 3 ниже.