ной системой, которую мы построили, но просто совпадает как многообразие с R^n. На языке теории групп (§ 1.4) V и R^n изоморфны. Это важный результат. Он означает, что каждое векторное пространство можно, когда это удобно, считать просто пространством R^n.

(vi) Разобранный выше пример (i) служит примером группы Ли, определение которой мы теперь в состоянии дать. *Группа Ли* G — это группа, являющаяся к тому же C^∞-многообразием, причём групповая операция должна индуцировать C^∞-отображение этого многообразия в себя. Это означает следующее. Возьмём любой элемент a группы. Этот элемент индуцирует отображение G в себя, при котором любой элемент b из G переходит в ba, $b \mapsto ba$. Требуется, чтобы это отображение было отображением класса C^∞; на координатном языке это означает, что координаты точки ba должны быть C^∞-функциями от координат точки b. В действительности это требование есть требование согласованности: оно гарантирует согласованность структуры многообразия с групповой структурой. В примере (i) совокупность всех вращений твёрдого тела образует группу: нетрудно показать, что её групповая структура согласована со структурой трёхмерного многообразия. (Эта группа Ли называется группой $SO(3)$.) Данное определение группы Ли может показаться поначалу чересчур абстрактным и сухим: оно сделается более живым после того, как мы разберём свойства групп Ли в гл. 3. Простым примером группы Ли является R^n. Это — векторное пространство (см. пример (v) выше) и тем самым группа, а также и многообразие: фактически R^n служит простейшим примером группы Ли.

2.4. О СВОЙСТВАХ МНОГООБРАЗИЙ «В ЦЕЛОМ»

Поскольку каждое многообразие локально устроено как некоторое R^n, любые два многообразия одинаковой размерности (и одного класса гладкости) локально неразличимы на данном уровне дифференциальной геометрии. Ситуация в корне меняется при переходе к рассмотрению глобальных структур, как это видно из сопоставления S^2 с R^2, проведенного в § 2.2. Следовательно, многообразия делятся на различные классы в соответствии с их глобальными свойствами. Например, поверхность сферы и поверхность мелка имеют одинаковую глобальную структуру. Хотя ни одну из них нельзя отобразить на R^2, для каждой имеется прекрасное 1-1-отображение на другую, как это показано на рис. 2.7. (Строго говоря, мелок должен иметь гладкие края для того, чтобы его поверхность можно было отождествить с S^2 как C^∞-многообразие.) Такое отображение непосредственно из одного C^∞-многообразия M в другое N, являющееся взаимно-однозначным и класса C^∞ (отображение принадлежит к классу C^∞, если координаты точки из N являются бесконечно дифференцируемыми функциями от координат точки-прообраза в M) и обладающее тем свойством, что его обратное тоже является C^∞-отображением, называется *диффеоморфизмом* M на N. Многообразия M и N, для которых такое отображение существует, называются *диффеоморфными*. Поверхность чайной чашки диффеоморфна тору (поверхности бублика), поскольку в каждой из этих поверхностей есть ровно одна дырка: каждую из них можно гладко продеформировать в другую.

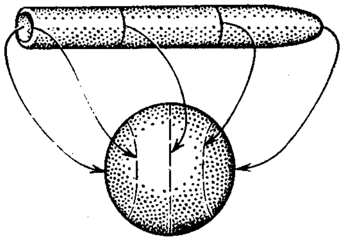

Рис. 2.7. Поверхность гладкого (класса C^∞) цветного мелка можно взаимно-однозначно отобразить на сферу S^2. Представленное на рисунке отображение определено глобально, а не только на каком-нибудь куске поверхности. Оно является диффеоморфизмом (как и обратное к нему).

Большая часть результатов, излагаемых в этой книге, относится к локальной геометрии, зависящей только от дифференциальной структуры. Но нам встретятся и такие ситуации, например при изучении расслоений и интегрирования функций, где глобальные свойства многообразия весьма существенны.

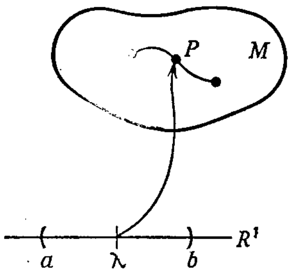

Рис. 2.8. Кривая в M — это отображение из R_1 в M. Точка λ из R^1 переходит в точку P из M. Образом открытого интервала с концами a и b в R^1 является нарисованная линия в M.

2.5. КРИВЫЕ

Для нас будут очень важны кривые на многообразиях. Общепринятым является представление о кривой как о непрерывном ряде точек в M. Нам здесь удобнее дать несколько иное определение: кривая — это (дифференцируемое) отображение открытого подмножества из R^1 в M (см. рис. 2.8). Таким образом, каждой точке из R^1 (являющейся вещественным числом, которое мы обозначим через λ) отвечает точка из M, называемая *точкой-образом*, отвечающей значению λ. Совокупность всех точек-образов и есть то, что понимается обычно под кривой, но согласно нашему определению каждой точке присваивается ещё некоторое значение λ. Ясно, что речь идёт о *параметризованной* кривой, с параметром λ. Поэтому