одного C^∞-многообразия M в другое N, являющееся взаимно-однозначным и класса C^∞ (отображение принадлежит к классу C^∞, если координаты точки из N являются бесконечно дифференцируемыми функциями от координат точки-прообраза в M) и обладающее тем свойством, что его обратное тоже является C^∞-отображением, называется *диффеоморфизмом* M на N. Многообразия M и N, для которых такое отображение существует, называются *диффеоморфными*. Поверхность чайной чашки диффеоморфна тору (поверхности бублика), поскольку в каждой из этих поверхностей есть ровно одна дырка: каждую из них можно гладко продеформировать в другую.

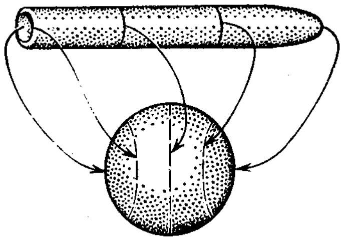

Рис. 2.7. Поверхность гладкого (класса C^∞) цветного мелка можно взаимно-однозначно отобразить на сферу S^2. Представленное на рисунке отображение определено глобально, а не только на каком-нибудь куске поверхности. Оно является диффеоморфизмом (как и обратное к нему).

Большая часть результатов, излагаемых в этой книге, относится к локальной геометрии, зависящей только от дифференциальной структуры. Но нам встретятся и такие ситуации, например при изучении расслоений и интегрирования функций, где глобальные свойства многообразия весьма существенны.

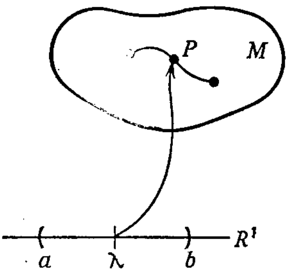

Рис. 2.8. Кривая в M — это отображение из R_1 в M. Точка λ из R^1 переходит в точку P из M. Образом открытого интервала с концами a и b в R^1 является нарисованная линия в M.

2.5. КРИВЫЕ

Для нас будут очень важны кривые на многообразиях. Общепринятым является представление о кривой как о непрерывном ряде точек в M. Нам здесь удобнее дать несколько иное определение: кривая — это (дифференцируемое) отображение открытого подмножества из R^1 в M (см. рис. 2.8). Таким образом, каждой точке из R^1 (являющейся вещественным числом, которое мы обозначим через λ) отвечает точка из M, называемая *точкой-образом*, отвечающей значению λ. Совокупность всех точек-образов и есть то, что понимается обычно под кривой, но согласно нашему определению каждой точке присваивается ещё некоторое значение λ. Ясно, что речь идёт о *параметризованной* кривой, с параметром λ. Поэтому две кривые различны, даже если они имеют совпадающие образы в M, но одинаковым точкам отвечают различные значения параметров. Как и раньше, под «дифференцируемым» мы понимаем такое отображение, для которого координаты точек-образов $\{x^i(\lambda),\ i=1, \ldots, n\}$ являются дифференцируемыми функциями от λ.

2.6. ФУНКЦИИ НА M

Функция на M — это правило, сопоставляющее каждой точке из M вещественное число (называемое *значением* функции). Если некоторая область в M отображается при помощи гладкого координатного отображения на область в R^n, то функция на M превращается в функцию на R^n (см. рис. 2.9).

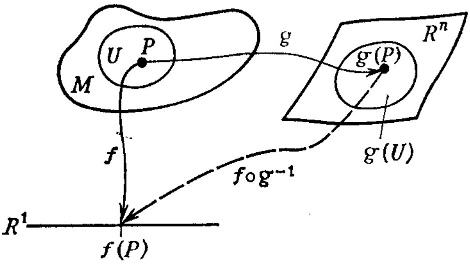

Рис. 2.9. Функция f на M есть отображение из M в R^1. Координатное отображение g из области U многообразия M, содержащей P, на область $g(U)$ в R^n обратимо. Составное отображение $f \circ g^{-1}$ переводит R^n в R^1, т. е. является функцией на R^n. Это просто выражение $f(P)$ через координаты точки P.

Если эта функция на R^n дифференцируема, то говорят, что она является *дифференцируемой функцией на многообразии* M. То же можно выразить по-другому: абстрактно говоря, наша функция может быть записана в виде $f(P)$, где P — точка из M. Но P задана своими координатами, так что нашу функцию можно записать в виде $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Если это выражение дифференцируемо по своим аргументам, то функция называется дифференцируемой. Сами координаты, конечно же, являются непрерывными и бесконечно дифференцируемыми функциями. Например, x^3 — это функция, для которой $x^3(P)$ есть значение третьей координаты точки P.

Начиная с этого места мы будем избегать упоминаний о координатных отображениях из M в R^n, хотя и будем иногда упоминать о координатах (задающих эти отображения). Цель нашего изучения координатных отображений состояла в том, чтобы по возможности строго сформулировать основные понятия. Отныне нас будет больше интересовать использование