две кривые различны, даже если они имеют совпадающие образы в M, но одинаковым точкам отвечают различные значения параметров. Как и раньше, под «дифференцируемым» мы понимаем такое отображение, для которого координаты точек-образов $\{x^i(\lambda),\ i=1, \ldots, n\}$ являются дифференцируемыми функциями от λ.

2.6. ФУНКЦИИ НА M

Функция на M — это правило, сопоставляющее каждой точке из M вещественное число (называемое *значением* функции). Если некоторая область в M отображается при помощи гладкого координатного отображения на область в R^n, то функция на M превращается в функцию на R^n (см. рис. 2.9).

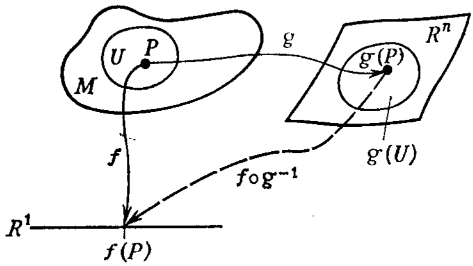

Рис. 2.9. Функция f на M есть отображение из M в R^1. Координатное отображение g из области U многообразия M, содержащей P, на область $g(U)$ в R^n обратимо. Составное отображение $f\circ g^{-1}$ переводит R^n в R^1, т. е. является функцией на R^n. Это просто выражение $f(P)$ через координаты точки P.

Если эта функция на R^n дифференцируема, то говорят, что она является *дифференцируемой функцией на многообразии* M. То же можно выразить по-другому: абстрактно говоря, наша функция может быть записана в виде $f(P)$, где P — точка из M. Но P задана своими координатами, так что нашу функцию можно записать в виде $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Если это выражение дифференцируемо по своим аргументам, то функция называется дифференцируемой. Сами координаты, конечно же, являются непрерывными и бесконечно дифференцируемыми функциями. Например, x^3 — это функция, для которой $x^3(P)$ есть значение третьей координаты точки P.

Начиная с этого места мы будем избегать упоминаний о координатных отображениях из M в R^n, хотя и будем иногда упоминать о координатах (задающих эти отображения). Цель нашего изучения координатных отображений состояла в том, чтобы по возможности строго сформулировать основные понятия. Отныне нас будет больше интересовать использование этих понятий для построения дифференциальной структуры на многообразиях, поэтому будем всюду в дальнейшем предполагать, что на рассматриваемом многообразии можно ввести координаты $\{x^i,\ i=1,\ \ldots,\ n\}$ и что любая система достаточно гладких функций $y^i = y^i(x^j)$, которая локально обратима (т. е. якобиан которой отличен от нуля, см. § 1.2), определяет допустимое преобразование к новым координатам $\{y^i,\ i=1,\ \ldots,\ n\}$.

2.7. ВЕКТОРЫ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Рассмотрим кривую, проходящую через точку P многообразия M, задаваемую уравнениями $x^i = x^i(\lambda)$, $i=1,\ \ldots,\ n$. Далее, возьмём дифференцируемую функцию $f(x^1,\ \ldots,\ x^n)$ (сокращенно $f(x^i)$) на M. В каждой точке кривой определено значение функции f. Таким образом, на кривой возникает дифференцируемая функция $g(\lambda)$, дающая значение f, которое та принимает в точке, отвечающей параметру λ:

$$g(\lambda) = f(x^1(\lambda),\ \ldots,\ x^n(\lambda)) = f(x^i(\lambda)).$$

Дифференцируя, получаем по цепному правилу

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\lambda} = \sum_i \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{2.2}$$

Это равенство справедливо для любой функции g, так что мы можем написать

◆ $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} = \sum_i \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.3}$$

С точки зрения обычного векторного исчисления в эвклидовом пространстве можно считать набор чисел $\{\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\lambda\}$ компонентами некоторого вектора, касательного к кривой $x^i(\lambda)$; это легко понять из того, что $\{\mathrm{d}x^i\}$ — бесконечно малое перемещение вдоль кривой и деление его на $\mathrm{d}\lambda$ меняет лишь длину, а не направление этого перемещения. На самом деле, поскольку кривая берётся вместе с вполне определённым параметром, для каждой кривой однозначно определён набор $\{\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\lambda\}$, о котором мы говорим, что это — компоненты *касательного вектора* к кривой. Итак, в силу нашего определения кривой, каждая кривая имеет единственный касательный вектор.

Разумеется, каждый вектор является касательным к бесконечному числу кривых, проходящих через точку P, и для этого имеются две различные причины. Во-первых, существует много кривых, касающихся друг друга и имеющих одинаковый касательный вектор в точке P; во-вторых, данный путь (траекторию) можно перепараметризовать так, чтобы каса-