этих понятий для построения дифференциальной структуры на многообразиях, поэтому будем всюду в дальнейшем предполагать, что на рассматриваемом многообразии можно ввести координаты $\{x^i,\ i=1,\ \ldots,\ n\}$ и что любая система достаточно гладких функций $y^i = y^i(x^j)$, которая локально обратима (т. е. якобиан которой отличен от нуля, см. § 1.2), определяет допустимое преобразование к новым координатам $\{y^i,\ i=1,\ \ldots,\ n\}$.

## 2.7. ВЕКТОРЫ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Рассмотрим кривую, проходящую через точку $P$ многообразия $M$, задаваемую уравнениями $x^i = x^i(\lambda)$, $i = 1, \ldots, n$. Далее, возьмём дифференцируемую функцию $f(x^1, \ldots, x^n)$ (сокращенно $f(x^i)$) на $M$. В каждой точке кривой определено значение функции $f$. Таким образом, на кривой возникает дифференцируемая функция $g(\lambda)$, дающая значение $f$, которое та принимает в точке, отвечающей параметру $\lambda$:

$$g(\lambda) = f(x^1(\lambda), \ \ldots, \ x^n(\lambda)) = f(x^i(\lambda)).$$

Дифференцируя, получаем по цепному правилу

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\lambda} = \sum_i \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{2.2}$$

Это равенство справедливо для любой функции $g$, так что мы можем написать

◆ $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} = \sum_i \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.3}$$

С точки зрения обычного векторного исчисления в эвклидовом пространстве можно считать набор чисел $\{\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\lambda\}$ компонентами некоторого вектора, касательного к кривой $x^i(\lambda)$; это легко понять из того, что $\{\mathrm{d}x^i\}$ — бесконечно малое перемещение вдоль кривой и деление его на $\mathrm{d}\lambda$ меняет лишь длину, а не направление этого перемещения. На самом деле, поскольку кривая берётся вместе с вполне определённым параметром, для каждой кривой однозначно определён набор $\{\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\lambda\}$, о котором мы говорим, что это — компоненты *касательного вектора* к кривой. Итак, в силу нашего определения кривой, каждая кривая имеет единственный касательный вектор.

Разумеется, каждый вектор является касательным к бесконечному числу кривых, проходящих через точку $P$, и для этого имеются две различные причины. Во-первых, существует много кривых, касающихся друг друга и имеющих одинаковый касательный вектор в точке $P$; во-вторых, данный путь (траекторию) можно перепараметризовать так, чтобы касательный вектор в $P$ не изменился. Это изображено на рис. 2.10. В качестве простого примера рассмотрим кривую $x^i(\lambda) = \lambda a^i$, где числа $\{a^i\}$ — константы. Тогда если $P$ — точка $\lambda = 0$, то касательный вектор имеет вид $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\lambda = a^i$. Другая кривая $x^i(\mu) = \mu^2 b^i + \mu a^i$ также проходит через $P$ при $\mu = 0$ и имеет такой же касательный вектор в этой точке, $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\mu = a^i$. Перепараметризация первой кривой $x^i =$

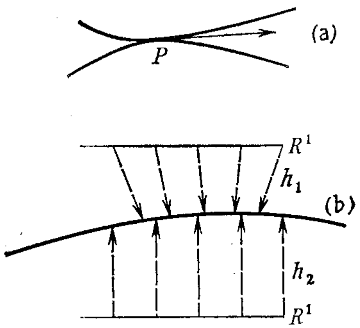


*Рис. 2.10.* (a) Две кривые с общим касательным вектором. (b) Две кривые, совпадающие геометрически (имеющие общую траекторию), но заданные при помощи различных параметризаций. Если соответствующие отображения обозначить через $h_1$ и $h_2$, то отображение $h_2^{-1} \circ h_1$ задаёт связь параметров $\lambda_1$ и $\lambda_2$: $\lambda_2 = \lambda_2(\lambda_1)$. Если $\mathrm{d}\lambda_2/\mathrm{d}\lambda_1 = 1$ в $P$, то в этой точке касательные векторы совпадают.

$(\mu^3 + \mu)a^i$ даёт кривую, проходящую через те же самые точки и имеющую в точке $P$ ($\mu = 0$) тот же самый касательный вектор $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\mu = a^i$. Итак, в действительности каждый вектор характеризует целый класс эквивалентности кривых, проходящих через данную точку.

Полезность термина «вектор» связана с привычностью этого понятия в геометрии эвклидова пространства, где векторы определяются аналогично перемещениям $\Delta x^i$. Однако поскольку на многообразии понятие расстояния между точками вовсе не обязано быть определённым, необходимо дать определение вектора, основанное только на рассмотрении инфинитезимальных окрестностей точек $M$. Пусть $a$ и $b$ — произвольные два числа и $x^i = x^i(\mu)$ — другая кривая, проходящая через точку $P$. Тогда в этой точке мы будем иметь

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} = \sum_i \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\mu} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

и

$$a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} = \sum_i \left(a\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} + b\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\mu}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Итак, числа $\{a\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\lambda + b\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\mu\}$ являются компонентами нового вектора, который, конечно же, касается *некоторой* кривой, проходящей через точку $P$. Следовательно, должна существовать кривая с параметром, скажем, $\varphi$, такая что в точке $P$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} = \sum_i \left(a\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} + b\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\mu}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Сопоставляя полученные результаты, заключаем, что в точке $P$

$$a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}.$$

Следовательно, операторы дифференцирования вдоль кривых (типа $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$) образуют *векторное пространство* в точке $P$[1]. В каждой системе координат имеются специальные кривые, а именно сами координатные линии. Ясно, что операторы дифференцирования вдоль этих кривых суть просто $\partial/\partial x^i$ и соотношение (2.3) показывает, что каждый оператор $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ может быть представлен в виде линейной комбинации частных производных $\partial/\partial x^i$. Поэтому система $\{\partial/\partial x^i\}$ образует *базис* указанного векторного пространства. Из равенства (2.3) вытекает, что вектор $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ имеет в этом базисе компоненты $\{\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\lambda\}$. Мы получаем, следовательно, замечательный результат: *пространство всех касательных векторов в точке $P$ и пространство всех дифференцирований вдоль кривых, проходящих через $P$, находятся во взаимно-однозначном соответствии.* По этой причине математики говорят, что $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ и *есть* касательный вектор к кривой $x^i(\lambda)$. Мы будем следовать такому соглашению, так как оно обладает тремя достоинствами. Во-первых, оно является корректным, поскольку не привлекаются перемещения на конечные расстояния. Во-вторых, в нём нет упоминания о координатах; в частности, не используются понятия типа «преобразуется так же, как ...». В-третьих, производная — это своего рода «движение» вдоль кривой, порождаемое касательным вектором: такое соединение понятия анализа — производной с понятием геометрии — вектором имеет далеко идущие последствия.

Можно по-прежнему представлять себе наглядно вектор как стрелку, касающуюся кривой, поскольку компоненты его в точности те же самые. Теперь, однако, нужно иметь в виду, что складывать можно лишь векторы, торчащие из одной

[1] Надо, конечно, убедиться в том, что для этих производных выполняются и другие аксиомы векторного пространства (см. § 1.5); но лишь проверка замкнутости относительно взятия линейных комбинаций является не совсем тривиальной.

точки. Векторы, торчащие из разных точек, не имеют никакого отношения друг к другу. Касательные векторы лежат не в $M$, а в *касательном пространстве* к $M$ в точке $P$, которое обозначается через $T_P$. Для привычных многообразий, таких как поверхность сферы, определённое выше касательное пространство совпадает, как легко видеть, с касательной плоскостью к сфере в данной точке. Для более абстрактных многообразий такое наглядное представление получить труднее.

Мы будем использовать термин *вектор* для вектора, торчащего в данной точке $P$ многообразия $M$. Термин *векторное поле* будет обозначать правило, задающее вектор в каждой точке $M$.

## 2.8. БАЗИСНЫЕ ВЕКТОРЫ И БАЗИСНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Для любой точки $P$ пространство $T_P$ является векторным пространством той же размерности $n$, что и само многообразие. Любая совокупность $n$ линейно-независимых векторов в $T_P$ образует *базис* в $T_P$. Выбирая тот или иной базис в каждом $T_P$ для всех точек $P$ из $M$, мы получаем базисные векторные поля. Если в окрестности $U$ точки $P$ задана система координат $\{x^i\}$, то в каждой точке из $U$ определён *координатный базис* $\{\partial/\partial x^i\}$.

Но вовсе не обязательно работать с координатным базисом — векторы можно записывать и по отношению к произвольному базису $\{\bar{e}_i\}$. Здесь индекс $i$ используется для нумерации базисных векторов. Он *не* обозначает компоненту чего-либо. В точке $P$ произвольный вектор $V$ может быть записан в виде

$$\bar{V} = \sum V^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j V^{j'} \bar{e}_j.$$

Числа $\{V^i\}$ являются компонентами вектора $\bar{V}$ относительно базиса $\{\partial/\partial x^i\}$. Числа $\{V^{j'}\}$ — компоненты $\bar{V}$ относительно $\{\bar{e}_j\}$; они связаны с $V^i$ согласно обычному закону преобразования векторов, о чём ещё пойдет речь ниже. Если $\bar{V}$ и базисы $\{\partial/\partial x^i\}$ и $\{\bar{e}_j\}$ рассматриваются как векторные поля, то компоненты $\{V^i\}$ и $\{V^{j'}\}$ поля $\bar{V}$ являются *функциями* на $M$. Векторное поле называется дифференцируемым, если эти функции дифференцируемы.

Мы неявно предположили выше, что векторы $\{\partial/\partial x^i\}$ для произвольной координатной системы линейно-независимы в каждой точке $P$ из $U$. Какие у нас соображения в пользу этого? Покажем, что это есть в точности условие того, что координаты являются *хорошими* в точке $P$, т. е. дают 1-1-отображение некоторой окрестности $U$ точки $P$ на соот-