точки. Векторы, торчащие из разных точек, не имеют никакого отношения друг к другу. Касательные векторы лежат не в M, а в *касательном пространстве* к M в точке P, которое обозначается через T_P. Для привычных многообразий, таких как поверхность сферы, определённое выше касательное пространство совпадает, как легко видеть, с касательной плоскостью к сфере в данной точке. Для более абстрактных многообразий такое наглядное представление получить труднее.

Мы будем использовать термин *вектор* для вектора, торчащего в данной точке P многообразия M. Термин *векторное поле* будет обозначать правило, задающее вектор в каждой точке M.

2.8. БАЗИСНЫЕ ВЕКТОРЫ И БАЗИСНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Для любой точки P пространство T_P является векторным пространством той же размерности n, что и само многообразие. Любая совокупность n линейно-независимых векторов в T_P образует *базис* в T_P. Выбирая тот или иной базис в каждом T_P для всех точек P из M, мы получаем базисные векторные поля. Если в окрестности U точки P задана система координат $\{x^i\}$, то в каждой точке из U определён *координатный базис* $\{\partial/\partial x^i\}$.

Но вовсе не обязательно работать с координатным базисом — векторы можно записывать и по отношению к произвольному базису $\{\bar{e}_i\}$. Здесь индекс i используется для нумерации базисных векторов. Он *не* обозначает компоненту чего-либо. В точке P произвольный вектор V может быть записан в виде

$$\bar{V} = \sum V^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j V^{j'} \bar{e}_j.$$

Числа $\{V^i\}$ являются компонентами вектора $\bar{V}$ относительно базиса $\{\partial/\partial x^i\}$. Числа $\{V^{j'}\}$ — компоненты $\bar{V}$ относительно $\{\bar{e}_j\}$; они связаны с V^i согласно обычному закону преобразования векторов, о чём ещё пойдет речь ниже. Если $\bar{V}$ и базисы $\{\partial/\partial x^i\}$ и $\{\bar{e}_j\}$ рассматриваются как векторные поля, то компоненты $\{V^i\}$ и $\{V^{j'}\}$ поля $\bar{V}$ являются *функциями* на M. Векторное поле называется дифференцируемым, если эти функции дифференцируемы.

Мы неявно предположили выше, что векторы $\{\partial/\partial x^i\}$ для произвольной координатной системы линейно-независимы в каждой точке P из U. Какие у нас соображения в пользу этого? Покажем, что это есть в точности условие того, что координаты являются *хорошими* в точке P, т. е. дают 1-1-отображение некоторой окрестности U точки P на соответствующую область V в R^n. Рассмотрим какую-нибудь *хорошую* систему координат на U, скажем $\{y^i,\ i = 1, \ldots, n\}$. Тогда отображение из $\{(x^1, \ldots, x^n)\}$ в U может быть записано в виде

$$y^j = y^j(x^1, \ldots, x^n), \quad j = 1, \ldots, n.$$

По теореме об обратной функции (§ 1.2) это отображение взаимно-однозначно, если и только если матрица Якоби $\partial y^j/\partial x^i$ невырожденна. Это означает, что в каждой точке из U векторы с компонентами $(\partial y^1/\partial x^1, \partial y^2/\partial x^1, \ldots, \partial y^n/\partial x^1)$, $(\partial y^1 \partial x^2, \partial y^2/\partial x^2, \ldots, \partial y^n/\partial x^2$, $(\partial y^1/\partial x^n, \partial y^2/\partial x^n, \ldots, \partial y^n/\partial x^n)$ линейно-независимы. Но это как раз и есть компоненты векторов $\{\partial/\partial x^i,\ i = 1, \ldots, n\}$ относительно координатного базиса для системы координат $\{y^i\}$, поскольку, согласно цепному правилу,

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial y^1}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{\partial y^2}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial y^2} + \ldots + \frac{\partial y^n}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial y^n}$$

и аналогично для остальных x^i. Итак, действительно, система $\{x^i\}$ координат в окрестности U является хорошей, если и только если $\{\partial/\partial x^i\}$ образуют базис пространства касательных векторов для каждой точки из U. Советуем читателю рассмотреть базисные векторы, отвечающие сферическим координатам на сфере, и разобраться в том, как портится этот базис в полюсах.

2.9. РАССЛОЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Очень интересное многообразие получится, если объединить многообразие M с совокупностью всех его касательных пространств T_P. Это проиллюстрировано на рис. 2.11 для простейшего случая: одномерное многообразие M (кривая) и его касательные пространства (касательные к кривой в каждой её точке). В части (a) рисунка изображены кривая и несколько касательных пространств: это прямые, касающиеся кривой, причём каждая мыслится неограниченно продолженной в обе стороны, с тем чтобы векторы могли иметь произвольную длину в каждой точке. Но если бы всё это было нарисовано, то рисунок оказался бы неразборчивым, поскольку различные касательные беспорядочно пересекали бы друг друга и кривую M; эти случайные пересечения не имеют никакого значения. Лучше изобразить всё так, как показано в части (b), где касательные пространства расположены параллельно: они не пересекают друг друга и пересекают M только в той точке, к которой они относятся. К сожалению, этот рисунок не отражает того, что каждое T_P «касается» кривой: это та цена, которую приходится платить за