ветствующую область V в R^n. Рассмотрим какую-нибудь *хорошую* систему координат на U, скажем $\{y^i,\ i=1, \ldots, n\}$. Тогда отображение из $\{(x^1, \ldots, x^n)\}$ в U может быть записано в виде

$$y^j = y^j(x^1, \ldots, x^n), \quad j = 1, \ldots, n.$$

По теореме об обратной функции (§ 1.2) это отображение взаимно-однозначно, если и только если матрица Якоби $\partial y^j/\partial x^i$ невырожденна. Это означает, что в каждой точке из U векторы с компонентами $(\partial y^1/\partial x^1, \partial y^2/\partial x^1, \ldots, \partial y^n/\partial x^1)$, $(\partial y^1 \partial x^2, \partial y^2/\partial x^2, \ldots, \partial y^n/\partial x^2$, $(\partial y^1/\partial x^n, \partial y^2/\partial x^n, \ldots, \partial y^n/\partial x^n)$ линейно-независимы. Но это как раз и есть компоненты векторов $\{\partial/\partial x^i,\ i=1, \ldots, n\}$ относительно координатного базиса для системы координат $\{y^i\}$, поскольку, согласно цепному правилу,

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial y^1}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{\partial y^2}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial y^2} + \ldots + \frac{\partial y^n}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial y^n}$$

и аналогично для остальных x^i. Итак, действительно, система $\{x^i\}$ координат в окрестности U является хорошей, если и только если $\{\partial/\partial x^i\}$ образуют базис пространства касательных векторов для каждой точки из U. Советуем читателю рассмотреть базисные векторы, отвечающие сферическим координатам на сфере, и разобраться в том, как портится этот базис в полюсах.

2.9. РАССЛОЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Очень интересное многообразие получится, если объединить многообразие M с совокупностью всех его касательных пространств T_P. Это проиллюстрировано на рис. 2.11 для простейшего случая: одномерное многообразие M (кривая) и его касательные пространства (касательные к кривой в каждой её точке). В части (а) рисунка изображены кривая и несколько касательных пространств: это прямые, касающиеся кривой, причём каждая мыслится неограниченно продолженной в обе стороны, с тем чтобы векторы могли иметь произвольную длину в каждой точке. Но если бы всё это было нарисовано, то рисунок оказался бы неразборчивым, поскольку различные касательные беспорядочно пересекали бы друг друга и кривую M; эти случайные пересечения не имеют никакого значения. Лучше изобразить всё так, как показано в части (b), где касательные пространства расположены параллельно: они не пересекают друг друга и пересекают M только в той точке, к которой они относятся. К сожалению, этот рисунок не отражает того, что каждое T_P «касается» кривой: это та цена, которую приходится платить за ясность рисунка. Каждая точка вертикальной прямой T_P представляет вектор, имеющий данную длину и касающийся M в точке P. Глядя на рис. 2.11 (b), можно сделать ещё одно наблюдение: каждая точка изображённой фигуры (двумерного многообразия) является точкой одного и только одного касательного к M пространства, скажем T_R для точки R из M. Каждой точке фигуры отвечает один и только один вектор в одной и только одной точке из M. Это наводит на мысль определить новое многообразие TM, состоящее из всех касательных векторов во всех точках: в рассматриваемом случае это

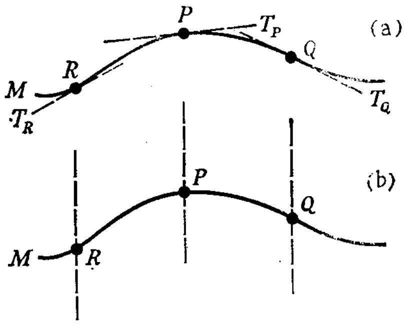

Рис. 2.11. (a) Одномерное многообразие и некоторые из его касательных пространств. (b) То же самое, но касательные пространства нарисованы параллельными друг другу, с тем чтобы исключить несущественные, случайные пересечения.

многообразие двумерно. Оно называется *расслоенным пространством* (или просто *расслоением*); его *слоями* являются пространства T_P для всех P. Использование термина «слой» объясняется картинками типа рис. 2.11 (b). Для того чтобы убедиться в двумерности TM, построим систему координат для небольшого куска этого пространства. Пусть одномерное многообразие M имеет координату x; выберем координаты в касательных пространствах, отвечающих точкам из M, лежащим в интервале $a < x < b$, для некоторых a и b, предполагая, что сама координата x является в этом интервале «хорошей». (Смысл такого предположения станет ясен из § 2.11 ниже.) Любой касательный вектор $\bar{V}$ в любой точке P может быть записан в виде

$$\bar{V} = y\partial/\partial x, \tag{2.4}$$

так что компонента y является координатой для T_P (см. (2.1)). Ясно, что она будет хорошей координатой на всём слое T_P. Поскольку каждый слой отвечает фиксированному значению x, координаты (x, y) однозначно определяют касательный вектор (y) и точку, к которой он относится (x). Поскольку каждая точка расслоенного пространства должна, по определению, лежать в некоторой области рассмотренного вида, то мы доказали, что TM является многообразием. Ясно, что эта конструкция легко переносится на касательные расслоения для многомерных многообразий. Координаты типа описанных выше, где координаты для T_P определяются координатами на M в окрестности P при помощи разложения вектора по базису (2.4), называются *естественными* координатами для TM.

Далее, кривая в рассматриваемом расслоенном пространстве, изображённая штриховой линией на рис. 2.12, задаёт

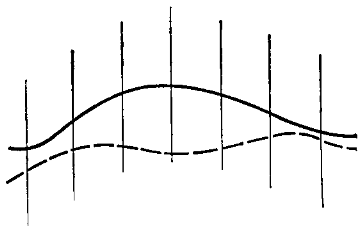

Рис. 2.12. Сечение (штриховая линия) расслоенного пространства TM над одномерным многообразием M (жирная линия).

некоторый вектор в каждой точке из M, поэтому такая кривая определяет векторное поле на M. Такая кривая называется *сечением* TM. Ясно, что, вообще говоря, не имеет никакого смысла говорить о длине такой кривой, так что мы имеем здесь пример многообразия, для которого не приходится утруждать себя определением в нём метрики.

В общем случае расслоенное пространство состоит из многообразия, называемого *базой* (в разобранном случае это была кривая M), и *слоя*, заданного для каждой точки базы. Если база n-мерна, а каждый слой m-мерен, то размерность расслоенного пространства равна $m+n$. Это многообразия особого рода, обладающие свойством разложимости на слои: точки одного слоя связаны друг с другом, а точки разных слоёв нет. Эта ситуация формализуется введением понятия *проекции* π, отображающей каждую точку слоя в ту точку базы, к которой «подвязан» данный слой. На произвольном многообразии такой проекции определить нельзя. В следующем параграфе мы приведём много примеров многообразий, являющихся расслоенными пространствами.

2.10. ПРИМЕРЫ РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

(i) Рассмотренное выше расслоенное пространство TM, состоящее из многообразия и его касательных пространств, называется *касательным расслоением* (или *касательным пучком*). *Это* — один из важнейших для физики примеров аб-