3. ПРОИЗВОДНЫЕ ЛИ И ГРУППЫ ЛИ

3.1. ВВЕДЕНИЕ: КАК ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ ОТОБРАЖАЕТ МНОГООБРАЗИЕ В СЕБЯ

В предыдущей главе мы познакомились с системой индексных обозначений. Эта система нужна для решения численных задач, но довольно часто она мешает раскрытию глубоких геометрических идей, составляющих существо дела. В самом начале мы дали определения векторов и тензоров, независимые от выбора базиса, а теперь, сохраняя тот же стиль, опишем один из наиболее полезных инструментов, используемых в геометрии, — производную Ли вдоль конгруэнции, определяемой векторным полем.

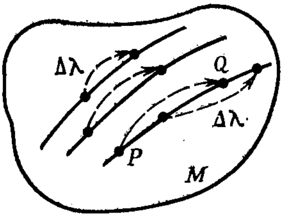

Рис. 3.1. Отображение многообразия M в себя, переводящее каждую точку в точку той же кривой данной конгруэнции, отвечающую значению параметра, которое на некоторое фиксированное число $\Delta\lambda$ больше значения параметра в исходной точке.

Мы уже упоминали о понятии конгруэнции в § 2.12; это — множество попарно непересекающихся кривых, заполняющих многообразие или некоторую его часть. Каждая точка из рассматриваемой области многообразия M принадлежит одной и только одной кривой. Поскольку каждая кривая является одномерным множеством точек, множество кривых, образующих конгруэнцию, имеет размерность $n-1$. (При соответствующей параметризации это множество кривых само становится многообразием.) Ключевым фактом, определяющим все последующие результаты, является то, что конгруэнция задаёт некоторое естественное *отображение* многообразия в себя. Если параметр на кривых обозначить через λ, то всякое достаточно малое число $\Delta\lambda$ будет определять отображение, которое каждую точку переводит в точку той же кривой на «расстоянии» $\Delta\lambda$ от неё (см. рис. 3.1). Это отображение взаимно-однозначно, по крайней мере в области, где векторное поле ведёт себя достаточно хорошо (хватает гладкости класса C^1). Если векторное поле — класса C^∞, то мы получаем диффеоморфизм (см. § 2.4). В случае когда такое отображение существует для всех $\Delta\lambda$, мы получаем одномерное дифференцируемое семейство таких отображений (фактически — однопараметрическую группу Ли с законом композиции $\Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2$). Такое отображение мы будем называть *переносом*[1] *вдоль конгруэнции* или *переносом Ли* (*ли-переносом*).

3.2. ДЕЙСТВИЕ ПЕРЕНОСА ЛИ НА ФУНКЦИИ

Пусть f — некоторая функция на многообразии. В результате переноса вдоль конгруэнции на $\Delta\lambda$ функции f очевидным образом ставится в соответствие новая функция $f^*_{\Delta\lambda}$: если точка P некоторой кривой (см. рис. 3.1) переходит в точку Q той же кривой на параметрическом расстоянии $\Delta\lambda$ от P, то значение новой функции $f^*_{\Delta\lambda}$ в точке Q равно значению f в точке P:

◆ $$f(P) = f^*_{\Delta\lambda}(Q).$$

(Здесь звёздочка в обозначении функции $f^*_{\Delta\lambda}$ означает просто «новая».) Если случится так, что для каждой точки Q значение $f^*_{\Delta\lambda}(Q)$ окажется равным $f(Q)$ — старому значению в точке Q, т. е.

$$f = f^*_{\Delta\lambda},$$

то мы говорим, что функция f *инвариантна* относительно переноса Ли на $\Delta\lambda$. Если функция инвариантна для всех $\Delta\lambda$, то говорят, что она является *ли-тянутой*[2]. Ясно, что всякая ли-тянутая функция f должна быть постоянной вдоль любой кривой данной конгруэнции, т. е. $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda = 0$.

3.3. ДЕЙСТВИЕ ПЕРЕНОСА ЛИ НА ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Прежде чем говорить о действии описанного выше отображения переноса Ли на векторные поля, напомним, что всякое векторное поле определяется конгруэнцией кривых, для которой оно является касательным полем. На рис. 3.2 показаны две конгруэнции: одна, для поля $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$, порождает отображение данного многообразия; это порождённое ею отображение действует на другую конгруэнцию, определяющую произвольное поле $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$. Действие это очень простое: любая кривая μ-конгруэнции отображается в новую кривую, получаемую в результате переноса Ли точек первой кривой; значения параметра μ также переносятся в новые точки. Итак, мы

---

[1] В оригинале dragging (буквально: волочение). Иногда используют также термин «увлечение». — *Прим. ред.*

[2] В оригинале Lie dragged. — *Прим. ред.*