т. е. должно совпадать со всем пространством. В действительности же это подмногообразие двумерно. В самом деле, если положить $r \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, то $\bar{l}_x(r) = \bar{l}_y(r) = \bar{l}_z(r) = 0$. Иначе это можно выразить так:

$$\tilde{d}r(\bar{l}_x) = \tilde{d}r(\bar{l}_y) = \tilde{d}r(\bar{l}_z) = 0. \tag{3.31}$$

В силу нашего описания градиента $\tilde{d}r$ как множества поверхностей постоянного r и в силу описания его свёртки, скажем с $\bar{l}_x$, как числа поверхностей, которые $\bar{l}_x$ «протыкает», из (3.31) вытекает, что все три оператора $\bar{l}_x$, $\bar{l}_y$ и $\bar{l}_z$ *касательны* в сфере $r = \text{const}$. Следовательно, в любой точке эти операторы линейно-зависимы и порождают подмногообразие размерности два — эту самую сферу, конечно.

Упражнение 3.6. Покажите, что утверждение упр. 3.3 останется справедливым, если заменить $\overline{W}$ *произвольным* тензорным полем.

Упражнение 3.7. Определим оператор L^2 формулой

$$L^2 = \pounds_{\bar{l}_x}\pounds_{\bar{l}_x} + \pounds_{\bar{l}_y}\pounds_{\bar{l}_y} + \pounds_{\bar{l}_z}\pounds_{\bar{l}_z}. \tag{3.32}$$

Докажите, что $\pounds_{\bar{l}_x}$ и L^2 коммутируют. По симметрии L^2 должно также коммутировать с $\pounds_{\bar{l}_x}$ и $\pounds_{\bar{l}_y}$. Покажите, что для любой скалярной функции f

$$L^2 f = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}, \tag{3.33}$$

где θ и φ — обычные сферические координаты. Таким образом, $L^2 f$ — «угловая часть» оператора $\nabla^2 f$ на единичной сфере.

3.10. ИНВАРИАНТНОСТЬ

С помощью производных Ли можно в удобной форме записать, что́ означает инвариантность тензорного поля относительно тех или иных преобразований, и это один из основных случаев использования производных Ли в физике. А именно, говорят, что тензорное поле T инвариантно относительно векторного поля $\bar{V}$, если

$$\pounds_{\bar{V}}\mathsf{T} = 0. \tag{3.34}$$

В случае когда T имеет физический смысл (скажем, является метрическим тензором, или скалярным полем, описывающим потенциальную энергию некоторой частицы, или векторным силовым полем), все те векторные поля (если они существуют), относительно которых **T** инвариантно, также представляют физический интерес. Например, в предыдущем параграфе рассматривались векторные поля, связанные с вращениями сферы. Известно, что момент импульса полезно рассматривать лишь в том случае, когда задача инвариантна относительно вращений вокруг хотя бы одной оси. Если система инвариантна относительно вращений в некоторой плоскости, то говорят, что эта система *аксиально-симметрична* (или *осесимметрична*), и момент импульса, отвечающий генератору этих вращений, является сохраняющейся величиной. Как это получается, мы обсудим в упр. 5.8; здесь же рассмотрим инвариантность в общем случае.

Центральное место в изучении понятия инвариантности занимает следующая теорема. Предположим, нам дано множество $F=\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots\}$ тензорных полей, свойства инвариантности которых нас интересуют. *Множество всех векторных полей $\bar{V}$, относительно которых все поля из F* инвариантны, *является алгеброй Ли* (определение алгебры Ли было дано в § 2.14). Доказательство этой теоремы мы проведём в два шага. На первом шаге, выполняемом в упр. 3.8, доказывается, что указанное множество полей является векторным пространством над вещественными числами.

Упражнение 3.8. Покажите, что если тензор **T** инвариантен относительно каждого из векторных полей $\bar{V}$ и $\bar{W}$, то он будет инвариантен и относительно $a\bar{V}+b\bar{W}$, где a и b — *постоянные.*

Наш второй шаг опирается на результат упр. 3.1 (а), применимый ввиду (3.13) и (3.15) ко всем тензорным полям. Если $\bar{V}$ и $\bar{W}$ — векторные поля из рассматриваемого множества, то для всякого тензорного поля $\mathbf{T}_i$ из F

$$\pounds_{\bar{V}}\mathbf{T}_i=\pounds_{\bar{W}}\mathbf{T}_i=0 \Rightarrow [\pounds_{\bar{V}}, \pounds_{\bar{W}}]\,\mathbf{T}_i=0 \Rightarrow \pounds_{[\bar{V},\bar{W}]}\mathbf{T}_i=0. \quad (3.35)$$

Следовательно, если $\bar{V}$ и $\bar{W}$ принадлежат нашему множеству, то и $[\bar{V}, \bar{W}]$ тоже ему принадлежит. Теорема доказана. Вскоре мы увидим, что алгебры Ли очень тесно связаны с группами Ли, и поэтому доказанная теорема отчасти помогает понять, почему группы Ли так полезны в физике. В следующих параграфах мы разберём несколько примеров инвариантности.

Весьма важно уяснить себе, какое именно векторное пространство представляет из себя эта алгебра Ли. Под линейной комбинацией полей V и W обычно понимают векторное поле $a\bar{V}+b\bar{W}$, где a и b — произвольные функции на данном многообразии. У нас же допускаются (см. упр. 3.8) лишь линейные комбинации, в которых a и b — *постоянные вели-*

чины. Для построенного нами векторного пространства *поля* $\bar{V}$ и $\bar{W}$ служат *элементами*; это — не расслоенное пространство, для которого $\bar{V}$ и $\bar{W}$ служат сечениями. Это больше похоже на конечномерные функциональные пространства (см. § 2.3). Возможно, этот момент может показаться несущественным, но он важен для определения размерности рассматриваемого векторного пространства. Например, три векторных поля $\bar{l}_x$, $\bar{l}_y$ и $\bar{l}_z$, о которых речь шла в предыдущем параграфе, линейно-зависимы как векторные поля в R^3, поскольку все они касательны к S^2. Но для представления одного из этих полей через два других приходится использовать линейные комбинации с *переменными* коэффициентами. Поэтому эти три поля суть *линейно-независимые* элементы алгебры Ли: никакая линейная комбинация этих полей с постоянными коэффициентами (не все из которых нули) не равна нулевому элементу алгебры, каковым является нулевое векторное поле. Поэтому мы говорим, что эти векторные поля образуют базис трехмерной алгебры Ли. Из других алгебр Ли мы знали до сих пор лишь одну, а именно алгебру *всех* касательных векторных полей к некоторому многообразию или подмногообразию. Никакое конечное множество таких полей не может быть базисом относительно линейных комбинаций с постоянными коэффициентами, поэтому мы говорим, что эта алгебра Ли бесконечномерна.

3.11. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ КИЛЛИНГА

Многие многообразия, встречающиеся в физике, обладают метриками, и случаи, когда метрика инвариантна относительно некоторого векторного поля, представляют значительный интерес. *Векторным полем Киллинга* (или *вектором Киллинга*) называется такое векторное поле $\bar{V}$, для которого

$$\blacklozenge \quad \pounds_{\bar{V}}\mathrm{g} = 0. \tag{3.36}$$

Можно показать, что координатная запись этого уравнения в заданной системе координат имеет следующий вид (ср. с (3.14)):

$$(\pounds_{\bar{V}}\mathrm{g})_{ij} = V^k \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} + g_{ik} \frac{\partial}{\partial x^j} V^k + g_{ki} \frac{\partial}{\partial x^i} V^k = 0. \tag{3.37}$$

Часто удобно использовать такую систему координат, в которой семейство интегральных кривых векторного поля $\bar{V}$ является семейством координатных линий, скажем для координаты x^1. Тогда, в силу упр. 3.6, мы имеем

$$(\pounds_{\bar{V}}\mathrm{g})_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^1} g_{ij} = 0, \tag{3.38}$$