чины. Для построенного нами векторного пространства *поля* $\bar{V}$ и $\bar{W}$ служат *элементами*; это — не расслоенное пространство, для которого $\bar{V}$ и $\bar{W}$ служат сечениями. Это больше похоже на конечномерные функциональные пространства (см. § 2.3). Возможно, этот момент может показаться несущественным, но он важен для определения размерности рассматриваемого векторного пространства. Например, три векторных поля $\bar{l}_x$, $\bar{l}_y$ и $\bar{l}_z$, о которых речь шла в предыдущем параграфе, линейно-зависимы как векторные поля в R^3, поскольку все они касательны к S^2. Но для представления одного из этих полей через два других приходится использовать линейные комбинации с *переменными* коэффициентами. Поэтому эти три поля суть *линейно-независимые* элементы алгебры Ли: никакая линейная комбинация этих полей с постоянными коэффициентами (не все из которых нули) не равна нулевому элементу алгебры, каковым является нулевое векторное поле. Поэтому мы говорим, что эти векторные поля образуют базис трехмерной алгебры Ли. Из других алгебр Ли мы знали до сих пор лишь одну, а именно алгебру *всех* касательных векторных полей к некоторому многообразию или подмногообразию. Никакое конечное множество таких полей не может быть базисом относительно линейных комбинаций с постоянными коэффициентами, поэтому мы говорим, что эта алгебра Ли бесконечномерна.

3.11. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ КИЛЛИНГА

Многие многообразия, встречающиеся в физике, обладают метриками, и случаи, когда метрика инвариантна относительно некоторого векторного поля, представляют значительный интерес. *Векторным полем Киллинга* (или *вектором Киллинга*) называется такое векторное поле $\bar{V}$, для которого

$$\blacklozenge \quad \pounds_{\bar{V}}\mathrm{g} = 0. \tag{3.36}$$

Можно показать, что координатная запись этого уравнения в заданной системе координат имеет следующий вид (ср. с (3.14)):

$$(\pounds_{\bar{V}}\mathrm{g})_{ij} = V^k \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} + g_{ik} \frac{\partial}{\partial x^j} V^k + g_{ki} \frac{\partial}{\partial x^i} V^k = 0. \tag{3.37}$$

Часто удобно использовать такую систему координат, в которой семейство интегральных кривых векторного поля $\bar{V}$ является семейством координатных линий, скажем для координаты x^1. Тогда, в силу упр. 3.6, мы имеем

$$(\pounds_{\bar{V}}\mathrm{g})_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^1} g_{ij} = 0, \tag{3.38}$$

т. е. метрические компоненты не зависят от координаты x^1. И обратно, если в некоторой системе координат компоненты метрики не зависят от какой-либо координаты, то базисный вектор, отвечающий этой координате, будет вектором Киллинга. Довольно часто векторы Киллинга находят именно таким способом.

В качестве примера найдем векторные поля Киллинга для трехмерного эвклидова пространства. Его метрика имеет в декартовых координатах компоненты

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \tag{3.39}$$

не зависящие от x, y и z. Поэтому $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$ суть векторы Киллинга. Та же метрика в сферических координатах имеет компоненты

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} = 1, \\ g_{\theta\theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} = r^2, \\ g_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} = r^2 \sin^2\theta. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Следовательно, $\partial/\partial\varphi$, т. е. $\bar{l}_z$, — вектор Киллинга. Ясно, что $\bar{l}_x$ и $\bar{l}_y$ — также векторы Киллинга. Эти шесть векторов Киллинга образуют базис алгебры Ли векторных полей Киллинга. Доказательство этого утверждения будет дано в гл. 5, ч. Е, где мы подробно рассмотрим максимально-симметричные пространства.

3.12. ВЕКТОРЫ КИЛЛИНГА И СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕЛИЧИНЫ В ДИНАМИКЕ ЧАСТИЦЫ

Из классической механики известно, что если сила является градиентом аксиально-симметричного потенциала, то момент импульса частицы относительно оси симметрии будет величиной, постоянной вдоль траектории частицы. Подобным же образом если потенциал не зависит от какой-нибудь из декартовых координат, скажем от x, то x-компонента импульса сохраняется. Однако довольно редко отмечается, что если потенциал имеет какую-либо другую симметрию (скажем, постоянен на семействе подобных эллипсоидов), то с ней *не связано никакой сохраняющейся величины*. Таким образом, сохраняемость величин является не просто следствием инвариантности потенциала относительно некоторого движения (кругового, линейного или эллиптического в наших трёх примерах), необходимо также, чтобы это движение осуществлялось вдоль *векторного поля Киллинга* того эвклидова пространства, которое используется для описания динамики. Мы