т. е. метрические компоненты не зависят от координаты x^1. И обратно, если в некоторой системе координат компоненты метрики не зависят от какой-либо координаты, то базисный вектор, отвечающий этой координате, будет вектором Киллинга. Довольно часто векторы Киллинга находят именно таким способом.

В качестве примера найдем векторные поля Киллинга для трехмерного эвклидова пространства. Его метрика имеет в декартовых координатах компоненты

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \tag{3.39}$$

не зависящие от x, y и z. Поэтому $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$ суть векторы Киллинга. Та же метрика в сферических координатах имеет компоненты

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} = 1, \\ g_{\theta\theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} = r^2, \\ g_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} = r^2 \sin^2\theta. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Следовательно, $\partial/\partial\varphi$, т. е. $\bar{l}_z$, — вектор Киллинга. Ясно, что $\bar{l}_x$ и $\bar{l}_y$ — также векторы Киллинга. Эти шесть векторов Киллинга образуют базис алгебры Ли векторных полей Киллинга. Доказательство этого утверждения будет дано в гл. 5, ч. Е, где мы подробно рассмотрим максимально-симметричные пространства.

3.12. ВЕКТОРЫ КИЛЛИНГА И СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕЛИЧИНЫ В ДИНАМИКЕ ЧАСТИЦЫ

Из классической механики известно, что если сила является градиентом аксиально-симметричного потенциала, то момент импульса частицы относительно оси симметрии будет величиной, постоянной вдоль траектории частицы. Подобным же образом если потенциал не зависит от какой-нибудь из декартовых координат, скажем от x, то x-компонента импульса сохраняется. Однако довольно редко отмечается, что если потенциал имеет какую-либо другую симметрию (скажем, постоянен на семействе подобных эллипсоидов), то с ней *не связано никакой сохраняющейся величины*. Таким образом, сохраняемость величин является не просто следствием инвариантности потенциала относительно некоторого движения (кругового, линейного или эллиптического в наших трёх примерах), необходимо также, чтобы это движение осуществлялось вдоль *векторного поля Киллинга* того эвклидова пространства, которое используется для описания динамики. Мы пока не владеем достаточной математической техникой, чтобы доказать это утверждение (его доказательство нам придётся отложить до упр. 5.8), но в правдоподобности его можно убедиться, рассмотрев уравнение движения. В общепринятых векторных обозначениях оно записывается так:

$$m\dot{\mathbf{V}} = -\nabla\Phi \quad \text{или} \quad m\dot{V}^i = -\nabla^i\Phi. \tag{3.41}$$

Но мы-то знаем, что для корректного определения вектора-градиента необходимо вводить в дело метрику, так что в действительности это уравнение имеет вид

$$m\dot{V}^i = -g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\Phi. \tag{3.42}$$

Ясно, что все инварианты, которые можно построить для этого уравнения, используют не только инвариантность Φ, но и инвариантность $\mathbf{g}$

3.13. ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

Для того чтобы продемонстрировать, каким естественным образом появляются производные Ли в задачах с симметрией, рассмотрим случай осевой симметрии. Осевая (или аксиальная) симметрия — это инвариантность относительно вращений вокруг некоторой фиксированной оси. (Её не следует путать с цилиндрической симметрией, которая требует не только инвариантности относительно вращений вокруг оси симметрии, но ещё и инвариантности относительно сдвигов вдоль этой оси.) Обозначим через φ угол поворота относительно оси симметрии. Довольно часто возникают задачи, в которых имеется некоторая «фоновая» осевая симметрия. В качестве примера можно указать частицу, двигающуюся в поле осесимметрического потенциала, либо малые возмущения какой-либо осесимметрической системы. В этом случае мы получаем линейное уравнение

$$L(\psi) = 0, \tag{3.43}$$

где ψ — неизвестная величина, а L — оператор, инвариантный относительно преобразования $\varphi \to \varphi + \text{const}$. Решения уравнения (3.43) не обязаны быть осесимметрическими: угол поворота частицы относительно оси в какой-то момент имеет одно значение, а в последующий момент — другое; рассматриваемое малое возмущение может иметь неосесимметричные начальные данные. Тем не менее скалярные решения обладают тем прекрасным свойством, что коэффициенты их разложения в ряд Фурье по φ

$$\psi(\varphi, x^j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m(x^j)\, e^{im\varphi} \tag{3.44}$$