пока не владеем достаточной математической техникой, чтобы доказать это утверждение (его доказательство нам придётся отложить до упр. 5.8), но в правдоподобности его можно убедиться, рассмотрев уравнение движения. В общепринятых векторных обозначениях оно записывается так:

$$m\dot{\mathbf{V}} = -\nabla\Phi \quad \text{или} \quad m\dot{V}^i = -\nabla^i\Phi. \tag{3.41}$$

Но мы-то знаем, что для корректного определения вектора-градиента необходимо вводить в дело метрику, так что в действительности это уравнение имеет вид

$$m\dot{V}^i = -g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\Phi. \tag{3.42}$$

Ясно, что все инварианты, которые можно построить для этого уравнения, используют не только инвариантность Φ, но и инвариантность $\mathbf{g}$

3.13. ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

Для того чтобы продемонстрировать, каким естественным образом появляются производные Ли в задачах с симметрией, рассмотрим случай осевой симметрии. Осевая (или аксиальная) симметрия — это инвариантность относительно вращений вокруг некоторой фиксированной оси. (Её не следует путать с цилиндрической симметрией, которая требует не только инвариантности относительно вращений вокруг оси симметрии, но ещё и инвариантности относительно сдвигов вдоль этой оси.) Обозначим через φ угол поворота относительно оси симметрии. Довольно часто возникают задачи, в которых имеется некоторая «фоновая» осевая симметрия. В качестве примера можно указать частицу, двигающуюся в поле осесимметрического потенциала, либо малые возмущения какой-либо осесимметрической системы. В этом случае мы получаем линейное уравнение

$$L(\psi) = 0, \tag{3.43}$$

где ψ — неизвестная величина, а L — оператор, инвариантный относительно преобразования $\varphi \to \varphi + \text{const}$. Решения уравнения (3.43) не обязаны быть осесимметрическими: угол поворота частицы относительно оси в какой-то момент имеет одно значение, а в последующий момент — другое; рассматриваемое малое возмущение может иметь неосесимметричные начальные данные. Тем не менее скалярные решения обладают тем прекрасным свойством, что коэффициенты их разложения в ряд Фурье по φ

$$\psi(\varphi, x^j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m(x^j)\, e^{im\varphi} \tag{3.44}$$

— функции $\psi_m(x^j)$ (индекс j пробегает все координаты, кроме φ) — удовлетворяют следующему, тесно связанному с исходным дифференциальному уравнению:

$$0 = L_m(\psi_m) = e^{-im\varphi} L(\psi_m e^{im\varphi}). \tag{3.45}$$

Операторы L и L_m, как правило, не тождественны, так как L может содержать производные по φ, а L_m не должен. Для примера рассмотрим оператор

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Ясно, что этот оператор инвариантен относительно преобразования $\varphi \to \varphi + \mathrm{const}$. Применяя этот оператор к функции $f(r, \theta) e^{im\varphi}$, получаем

$$\nabla^2 (f(r, \theta) e^{im\varphi}) = e^{im\varphi} \left\{ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{m^2}{r^2\sin^2\theta} \right\} f(r, \theta). \tag{3.46}$$

Оператор в фигурных скобках есть оператор ∇^2_m в смысле формулы (3.45). Это разложение Фурье функции f не так уж полезно в задачах о движении частицы, когда положение частицы описывается дельта-функцией от φ, но чрезвычайно удобно в случае непрерывных систем, таких, например, как волны на осесимметричном фоне. Играющие ключевую роль функции $e^{im\varphi}$ можно назвать *скалярными осевыми гармониками.*

Скажем, что решение ψ уравнения (3.43) имеет *осевое собственное значение* m, если

$$\blacklozenge \quad \mathcal{L}_{\bar{e}_\varphi}\psi = im\psi, \tag{3.47}$$

где $\bar{e}_\varphi \equiv \partial/\partial\varphi$ — поле касательных векторов к окружностям симметрии. Все это очень просто, пока ψ — скалярная функция, но предположим, мы имеем дело с векторным уравнением, скажем с уравнением для векторного потенциала в теории электромагнетизма. И в этом случае опять полезны осевые гармоники, но это должны быть уже *векторные* осевые гармоники, к построению которых мы и перейдём.

Рассмотрим подмногообразие $\varphi = 0$ (в действительности это не просто подмногообразие, а так называемое подмногообразие с краем; краем здесь служит ось симметрии). В каждой его точке выберем какой-нибудь базис $\{\bar{e}_j\}$ векторов, касательных к подмногообразию. Дополним этот базис вектором $\bar{e}_\varphi$, так что $\{\bar{e}_\varphi, \bar{e}_j\}$ будет базисом касательного пространства к многообразию в точках нашего подмногообразия. Теперь построим из него базис для всего многообразия, переносся его по Ли вдоль векторного поля $\bar{e}_\varphi$, вокруг оси симметрии, как показано на рис. 3.8. Каждое из полученных базисных векторных полей удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}_{\bar{e}_\varphi} \bar{e}_j = 0, \tag{3.48}$$

т. е. все они осесимметрические. Следует заметить, что в обычных декартовых координатах компоненты вектора $\bar{e}_j$ по мере движения вокруг оси изменяются. Осевая симметрия векторного поля совсем не означает, что его декартовы компоненты не зависят от φ, она означает лишь, что не зависят от φ его компоненты в некоторой системе координат, включающей φ.

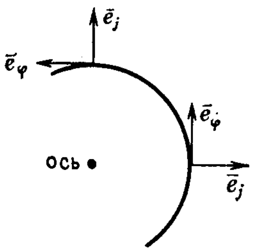

Рис. 3.8. Базис $(\bar{e}_\varphi, \bar{e}_j)$, полученный в результате переноса Ли вдоль поля $\bar{e}_\varphi$ (вид сверху вдоль оси симметрии).

Итак, мы имеем базис векторов с осевым собственным значением 0 (см. (3.48)). Ясно, что базисом с осевым собственным значением m будет

$$\bar{e}_{(m)j} = \bar{e}_j e^{im\varphi},$$
$$\bar{e}_{(m)\varphi} = \bar{e}_\varphi e^{im\varphi}. \tag{3.49}$$

Любое векторное поле, удовлетворяющее соотношению

$$\mathcal{L}_{\bar{e}_\varphi} \bar{V} = im\bar{V}.$$

можно представить в виде линейной комбинации векторных осевых гармоник с собственным значением m, задаваемых формулой (3.49), с коэффициентами, не зависящими от φ.

Упражнение 3.9. В эвклидовом трёхмерном пространстве постройте осевые векторные гармоники для вращения вокруг оси z, выбрав в плоскости $\varphi = 0$ базис $\{\bar{e}_x, \bar{e}_z\}$. Найдите декартовы координаты трёх векторных гармоник, отвечающих $m = 2$. Подобным же образом, отправляясь от базиса $\{\tilde{d}x, \tilde{d}z\}$ в плоскости $\varphi = 0$, найдите базис один-форм, являющихся осевыми гармониками с собственным значением $m = 2$. Покажите, что если f — скалярная функция с осевым собственным значением 2, то её градиент $\tilde{d}f$ будет один-формой с осевым собственным значением 2. Докажите, что $\bar{e}_x \pm i\bar{e}_y$ имеет осевые собственные значения ± 1.

Хотя мы этим пока и не пользовались, ясно, что всё это тесно связано с теорией групп. Существование осевой симметрии означает, что «фоновая» физическая ситуация инвариантна относительно переносов Ли вдоль $\partial/\partial\varphi$, а эти переносы образуют группу Ли, как было описано в § 3.1. Эта группа, $SO(2)$, чрезвычайно проста. Больший интерес представляет группа всех вращений трёхмерного пространства (симметрия относительно этой группы называется сферической симметрией); эта группа уже сложнее, поскольку производные Ли вдоль $\bar{l}_x$, $\bar{l}_y$ и $\bar{l}_z$ попарно не коммутируют. Чтобы исследовать этот случай, необходимо предварительно провести систематическое изучение самих групп Ли, чему и посвящена оставшаяся часть главы.

3.14. АБСТРАКТНЫЕ ГРУППЫ ЛИ

Мы уже несколько раз касались групп Ли и алгебр Ли. Теперь займёмся их систематическим изучением. Использование групп Ли и алгебр Ли в физике объясняется главным образом тем, что, как мы уже видели, с их помощью выражаются свойства инвариантности некоторых физически важных тензоров. Этот вопрос будет рассмотрен в последующих параграфах; в данном параграфе наша цель — исследовать многообразие группы само по себе. Необходимо совершенно чётко представлять себе, что между многообразием группы и каким бы то ни было многообразием, снабжённым тензором, свойства инвариантности которого описываются группой, нет ничего общего. Многообразие всех вращений $(SO(3))$ отлично от многообразия, координатные системы которого вращаются (E^3).

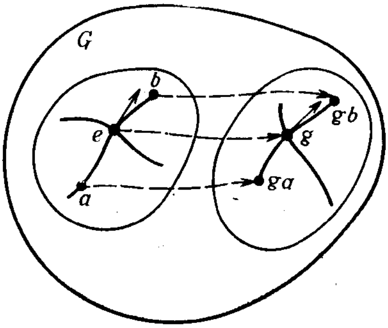

Рис. 3.9. Левый сдвиг на g отображает окрестность точки e на окрестность точки g. Таким образом, имеется естественное отображение векторов в точке e в векторы в точке g.

Пусть нам дана конечномерная группа Ли, т. е. многообразие класса C^∞ размерности n, на котором заданы следующие отображения класса C^∞ (диффеоморфизмы): любому элементу g из G отвечает отображение $h \to gh$ (*левый сдвиг на* (или *посредством*) g), а также отображение $h \mapsto hg$ (*правый сдвиг на* g). Не предполагается, что данная группа является абелевой (коммутативной) (т. е., вообще говоря, $hg \neq gh$). Единичный элемент группы будем обозначать через e. Произвольная окрестность единичного элемента e отображается при левом сдвиге на данный элемент g в некоторую окрестность этого элемента (см. рис. 3.9). Поскольку это отображение переводит кривые в кривые же, касательные векторы в точке e (элементы касательного пространства T_e) отображаются в касательные векторы в точке g. Получаемое