группа, $SO(2)$, чрезвычайно проста. Больший интерес представляет группа всех вращений трёхмерного пространства (симметрия относительно этой группы называется сферической симметрией); эта группа уже сложнее, поскольку производные Ли вдоль $\bar{l}_x$, $\bar{l}_y$ и $\bar{l}_z$ попарно не коммутируют. Чтобы исследовать этот случай, необходимо предварительно провести систематическое изучение самих групп Ли, чему и посвящена оставшаяся часть главы.

3.14. АБСТРАКТНЫЕ ГРУППЫ ЛИ

Мы уже несколько раз касались групп Ли и алгебр Ли. Теперь займёмся их систематическим изучением. Использование групп Ли и алгебр Ли в физике объясняется главным образом тем, что, как мы уже видели, с их помощью выражаются свойства инвариантности некоторых физически важных тензоров. Этот вопрос будет рассмотрен в последующих параграфах; в данном параграфе наша цель — исследовать многообразие группы само по себе. Необходимо совершенно чётко представлять себе, что между многообразием группы и каким бы то ни было многообразием, снабжённым тензором, свойства инвариантности которого описываются группой, нет ничего общего. Многообразие всех вращений ($SO(3)$) отлично от многообразия, координатные системы которого вращаются (E^3).

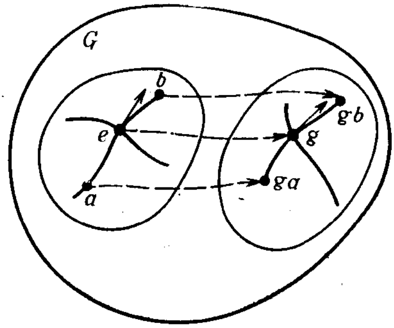

Рис. 3.9. Левый сдвиг на g отображает окрестность точки e на окрестность точки g. Таким образом, имеется естественное отображение векторов в точке e в векторы в точке g.

Пусть нам дана конечномерная группа Ли, т. е. многообразие класса C^∞ размерности n, на котором заданы следующие отображения класса C^∞ (диффеоморфизмы): любому элементу g из G отвечает отображение $h \to gh$ (*левый сдвиг на* (или *посредством*) g), а также отображение $h \mapsto hg$ (*правый сдвиг на* g). Не предполагается, что данная группа является абелевой (коммутативной) (т. е., вообще говоря, $hg \neq gh$). Единичный элемент группы будем обозначать через e. Произвольная окрестность единичного элемента e отображается при левом сдвиге на данный элемент g в некоторую окрестность этого элемента (см. рис. 3.9). Поскольку это отображение переводит кривые в кривые же, касательные векторы в точке e (элементы касательного пространства T_e) отображаются в касательные векторы в точке g. Получаемое таким образом отображение $L_g: T_e \to T_g$ также представлено на рис. 3.9. (Принцип здесь тот же самый, что и в случае отображения переноса Ли, см. § 3.3.) Говорят, что векторное поле $\bar{V}$ на G *левоинвариантно*, если L_g переводит значение $\bar{V}$ в точке e в значение $\bar{V}$ в точке g (т. е. $L_g: \bar{V}(e) \mapsto \bar{V}(g)$) для *всех* g. В таком случае, в силу свойств группового закона композиции, L_g: $\bar{V}(h) \mapsto \bar{V}(gh)$ для всех h из G, так что данное выше определение — это естественное определение «постоянного» векторного поля на G. Также ясно, что каждый

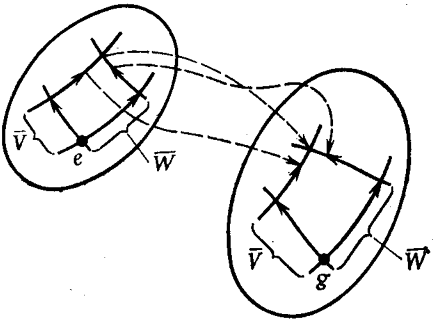

Рис. 3.10. Отображение незамкнутого параллелограмма на рис. 2.21 для левоинвариантных векторных полей. Поскольку поля левоинвариантны, смещения на параметрическое расстояние ε в окрестности точки e отобразятся в такие же сдвиги в окрестности точки g, и потому "зазор" в окрестности e, представляющий скобку Ли рассматриваемых полей, отобразится в зазор в окрестности g, представляющий скобку Ли сдвинутых полей.

вектор из T_e определяет единственное левоинвариантное векторное поле, откуда следует, что левоинвариантные векторные поля образуют n-мерное векторное пространство. (Как и в случае линейных комбинаций, рассмотренных в § 3.10, коэффициентами в линейных комбинациях этих полей являются *константы*, а не функции на G.) Далее, легко видеть (см. рис. 3.10), что если $\bar{V}$ и $\bar{W}$ — два произвольных левоинвариантных векторных поля, то L_g переводит значение поля $[\bar{V}, \bar{W}]$ в точке e в значение того же поля в точке g, так что поле $[\bar{V}, \bar{W}]$ также оказывается левоинвариантным. (Те читатели, для которых приведённая картинка не кажется убедительной, могут, используя координаты на G, сами доказать этот результат.) Этот факт весьма важен, ибо он означает, что *левоинвариантные векторные поля образуют алгебру Ли*. Это так называемая *алгебра Ли группы* G. Она обозначается через $\mathfrak{L}(G)$ (некоторые авторы обозначают её через $\mathfrak{g}$). Эта алгебра Ли полностью характеризуется своими *структурными константами* c^j_{kl}, определяемыми следующим образом. Пусть $\{\bar{V}_{(i)}, i = 1, \ldots, n\}$ — какой-нибудь базис нашей алгебры Ли, т. е. линейно-независимое множество левоинвариантных векторных полей. (Если эти поля линейно-независимы в одной точке, скажем e, то в силу левоинвариантности они будут линейно-независимы всюду.) Тогда можно записать

$$[\bar{V}_{(k)}, \bar{V}_{(l)}] = c^j_{kl}\bar{V}_{(j)} \tag{3.50}$$

(суммирование подразумевается). Если все структурные константы обращаются в нуль, то алгебра Ли называется *абелевой* (*коммутативной*). Ниже мы увидим, что тогда и G оказывается абелевой[1]. Естественно, базис $\{\bar{V}_{(k)}\}$ не является единственно возможным; можно показать, что при заменах базиса числа $c^j{}_{kl}$ преобразуются как компоненты тензора типа $\binom{1}{2}$. По каждой группе Ли с её алгеброй Ли однозначно определяется «тензор структурных констант» **C**. Имеет место также ослабленный вариант обратного утверждения, а именно, множество структурных констант «почти» однозначно определяет группу Ли, алгебре Ли которой они соответствуют. Это утверждение мы обсудим ниже в § 3.16.

Рассмотрим интегральную кривую левоинвариантного векторного поля $\bar{V}$, проходящую через e. Она имеет касательный вектор $\bar{V}_e$ в точке e, и существует однозначно определённая параметризация этой кривой (с параметром, скажем, t), для которой точке e соответствует значение параметра $t = 0$. Как было показано в § 2.13, точки на этой кривой могут быть получены экспоненцированием $\bar{V}$, т. е. могут быть представлены в виде $\exp(t\bar{V})$. Здесь речь идёт попросту о диффеоморфизме многообразия G на себя, порождённом векторным полем $\bar{V}$ (см. § 3.1). В отличие от произвольного векторного поля, поле $\bar{V}$ полностью определяется вектором $\bar{V}_e$, поэтому точки многообразия G, лежащие на указанной кривой, можно обозначить так:

$$g_{\bar{V}_e}(t) = \exp(t\bar{V})|_e. \tag{3.51}$$

Поскольку, по определению, для экспоненты выполняется соотношение

$$\exp(t_2\bar{V})\exp(t_1\bar{V})|_e = \exp[(t_1 + t_2)\bar{V}]|_e,$$

точки на нашей интегральной кривой образуют группу

$$\begin{aligned} g_{\bar{V}_e}(t_1 + t_2) &= \exp[(t_1 + t_2)\bar{V}]|_e \\ &= \exp(t_2\bar{V})\exp(t_1\bar{V})|_e = g_{\bar{V}_e}(t_2)\,g_{\bar{V}_e}(t_1), \end{aligned} \tag{3.52}$$

которая называется *однопараметрической подгруппой* груп-

[1] При условии её связности. — *Прим. ред.*

пы G. Эта подгруппа всегда будет абелевой: $g_{\overline{V}_e}(t_1+t_2)=g_{\overline{V}_e}(t_2+t_1)$ — просто потому, что групповая операция соответствует сложению значений параметра. Каждому вектору из T_e соответствует единственная такая подгруппа. Далее, поскольку каждая однопараметрическая подгруппа является кривой в G класса C^∞, проходящей через точку e (подгруппа всегда содержит единичный элемент), то существует взаимно-однозначное соответствие между однопараметрическими подгруппами группы G и элементами её алгебры Ли.

Упражнение 3.10. Дайте определение правоинвариантного векторного поля. Покажите, что такие поля образуют алгебру Ли. Докажите, что их интегральные кривые, проходящие через точку e, совпадают с интегральными кривыми левоинвариантных векторных полей. Покажите, что их интегральные кривые, проходящие через другие точки, вообще говоря, не совпадают с интегральными кривыми левоинвариантных полей, за исключением случая, когда группа является абелевой.

Упражнение 3.11. (a) Покажите, что произвольный базис $\{V_i(e),\ i=1,\ \ldots,\ n\}$ в T_e определяет линейно-независимое множество левоинвариантных векторных полей, которые мы обозначим через $\{\overline{V}_i\}$.

(b) Рассмотрим касательное расслоение TG группы Ли G. В некоторой окрестности U точки e введём для него следующие координаты. Пусть $\overline{X}$ — вектор в точке g из U. Запишем $\overline{X}=\sum_i \alpha_i\overline{V}_i(g)$. Слоем в точке g служит R^n, поэтому в качестве координат вектора $\overline{X}$ возьмём $\{\alpha_i\}$. Координатами в расслоении TG над U будут тогда $\{\{$координаты точки $g\}$, $\{\alpha_i\}\}$. Показать, что этот выбор координат можно распространить на всё TG таким образом, чтобы получилось 1-1-отображение TG на $G\times R^n$, т. е. что *касательное расслоение группы Ли тривиально.*

3.15. ПРИМЕРЫ ГРУПП ЛИ

(i) Простейшим примером группы Ли служит R^n, которое представляет собой многообразие и группу относительно сложения векторов. Это абелева группа. Однопараметрическими подгруппами являются прямые, проходящие через начало координат. Левоинвариантные векторные поля параллельны этим прямым; очевидно, все они коммутируют между собой. Отсюда следует, что соответствующая алгебра Ли есть векторное пространство T_e, снабжённое абелевой скобкой Ли: $[\overline{V},\overline{W}]=0$ для всех $\overline{V}$ и $\overline{W}$ из T_e.

(ii) Для физики одной из самых важных групп Ли является группа всех вещественных $n\times n$-матриц с отличным