пы G. Эта подгруппа всегда будет абелевой: $g_{\overline{V}_e}(t_1+t_2) = g_{\overline{V}_e}(t_2+t_1)$ — просто потому, что групповая операция соответствует сложению значений параметра. Каждому вектору из T_e соответствует единственная такая подгруппа. Далее, поскольку каждая однопараметрическая подгруппа является кривой в G класса C^∞, проходящей через точку e (подгруппа всегда содержит единичный элемент), то существует взаимно-однозначное соответствие между однопараметрическими подгруппами группы G и элементами её алгебры Ли.

Упражнение 3.10. Дайте определение правоинвариантного векторного поля. Покажите, что такие поля образуют алгебру Ли. Докажите, что их интегральные кривые, проходящие через точку e, совпадают с интегральными кривыми левоинвариантных векторных полей. Покажите, что их интегральные кривые, проходящие через другие точки, вообще говоря, не совпадают с интегральными кривыми левоинвариантных полей, за исключением случая, когда группа является абелевой.

Упражнение 3.11. (a) Покажите, что произвольный базис $\{\overline{V}_i(e),\ i=1, \ldots, n\}$ в T_e определяет линейно-независимое множество левоинвариантных векторных полей, которые мы обозначим через $\{\overline{V}_i\}$.

(b) Рассмотрим касательное расслоение TG группы Ли G. В некоторой окрестности U точки e введём для него следующие координаты. Пусть $\overline{X}$ — вектор в точке g из U. Запишем $\overline{X} = \sum_i a_i\overline{V}_i(g)$. Слоем в точке g служит R^n, поэтому в качестве координат вектора $\overline{X}$ возьмём $\{a_i\}$. Координатами в расслоении TG над U будут тогда $\{\{$координаты точки $g\}, \{a_i\}\}$. Показать, что этот выбор координат можно распространить на всё TG таким образом, чтобы получилось 1-1-отображение TG на $G \times R^n$, т. е. что *касательное расслоение группы Ли тривиально.*

3.15. ПРИМЕРЫ ГРУПП ЛИ

(i) Простейшим примером группы Ли служит R^n, которое представляет собой многообразие и группу относительно сложения векторов. Это абелева группа. Однопараметрическими подгруппами являются прямые, проходящие через начало координат. Левоинвариантные векторные поля параллельны этим прямым; очевидно, все они коммутируют между собой. Отсюда следует, что соответствующая алгебра Ли есть векторное пространство T_e, снабжённое абелевой скобкой Ли: $[\overline{V}, \overline{W}] = 0$ для всех $\overline{V}$ и $\overline{W}$ из T_e.

(ii) Для физики одной из самых важных групп Ли является группа всех вещественных $n \times n$-матриц с отличным от нуля определителем. Эта группа называется *полной линейной группой n-мерного вещественного пространства*[1] и обозначается через $GL(n, \mathrm{R})$. Она является группой Ли по следующим причинам. Во-первых, это группа относительно операции умножения матриц, единичным элементом которой служит единичная матрица. (Требование, чтобы определитель был не равен нулю, необходимо, ибо оно обеспечивает существование обратного элемента для любой матрицы.) Во-вторых, это многообразие. Для любой матрицы A из $GL(n, \mathrm{R})$ с элементами $\{a^i{}_j,\ i,\ j = 1, \ldots, n\}$ можно рассмотреть окрестность радиуса ε, состоящую из матриц B, для которых $|b^i{}_j - a^i{}_j| < \varepsilon$ при всех i и j, и ε можно выбрать настолько малым, чтобы каждая матрица B тоже имела отличный от нуля определитель. В качестве координат в этой окрестности можно взять $x^i{}_j = b^i{}_j - a^i{}_j$, и поскольку их n^2 и все они независимы, то размерность группы $GL(n, \mathrm{R})$ равна n^2. В действительности это — подмногообразие пространства R^{n^2}. Поскольку R^{n^2}, подобно любому R^m, тождественно с касательным пространством в любой из своих точек, то касательным пространством к группе $GL(n, \mathrm{R})$ в единице e будет R^{n^2}, и, следовательно, любой касательный вектор представим в виде матрицы. Например, кривая в $GL(n, \mathrm{R})$, образованная матрицами $\mathrm{diag}(1 + \exp(\lambda),\ 1,\ 1, \ldots, 1)$, где λ — параметр, имеет в точке $\lambda = 0$ касательную $\mathrm{diag}(1, 0, 0, \ldots, 0)$. Определитель этой матрицы равен *нулю*, что иллюстрирует тот факт, что в T_e входят *все* матрицы и что *любая* матрица порождает однопараметрическую подгруппу, левоинвариантное векторное поле[2] и некоторый элемент алгебры Ли группы Ли $GL(n, \mathrm{R})$.

Однопараметрическая подгруппа, порождённая произвольной матрицей A, является проходящей через точку e интегральной кривой левоинвариантного векторного поля, значение которого в e совпадает с A. Обозначим матрицы из этой подгруппы через $g_A(t)$, так что $\mathrm{d}g_A(t)/\mathrm{d}t|_0 = A$ (это просто означает, что $\mathrm{d}(g_A)^i{}_j/\mathrm{d}t|_0 = a^i{}_j$ для всех i, j). В силу (3.52) имеем

$$g_A(t + \Delta t) = g_A(t)\, g_A(\Delta t)$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}g_A(t)/\mathrm{d}t = g_A(t) A \tag{3.53}$$

$$\Rightarrow g_A(t) = \exp(tA) \tag{3.54}$$

$$= 1 + tA + \frac{1}{2!} t^2 A^2 + \frac{1}{3!} t^3 A^3 + \ldots \tag{3.55}$$

---

[1] В оригинале General Linear group in n Real dimensions. Отсюда обозначение $GL(n, R)$. — Прим. ред.

[2] Следует помнить, что векторы, касательные к G, в действительности являются матрицами и их не надо путать с «векторами-столбцами», которые здесь не играют никакой роли.

Формула (3.55) есть определение экспоненты от матрицы; вместе с (3.54) она даёт конкретную реализацию формулы (3.51). Таким образом, однопараметрические подгруппы группы $GL(n, \mathrm{R})$ являются экспонентами произвольных $n \times n$-матриц. Матрицу A физики часто называют *инфинитезимальным генератором* подгруппы $g_A(t)$. В упр. 3.12 приводятся некоторые свойства экспоненты $\exp(tA)$.

Упражнение 3.12. (a) Покажите, что (3.55) удовлетворяет соотношению (3.53).

(b) Покажите, что из (3.55) вытекает соотношение

$$\exp(B^{-1}AB) = B^{-1}\exp(A)B. \tag{3.56}$$

(c) Известно (см., например, Hirsch & Smale, 1974 [1]), что для произвольной вещественной матрицы A можно подобрать такую вещественную матрицу B, что $B^{-1}AB$ будет иметь следующую *каноническую* (или *жорданову*) форму (называемую также блочно-диагональной формой, так как ненулевые элементы образуют квадратные блоки вдоль главной диагонали)

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & P_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & P_3 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \tag{3.57}$$

где каждый «блок» P_j является квадратной матрицей, причём возможны следующие три случая [2]:

(i) P_j является 1×1-матрицей

$$(\lambda_j); \tag{3.58a}$$

[1] Или любой достаточно полный учебник по высшей алгебре. — *Прим. ред.*

[2] Возможен ещё один случай:

(iv) P_j является недиагональной $2n_j \times 2n_j$-матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \tilde{P}_j & E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{P}_j & E & & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & & & \tilde{P}_j & E \\ 0 & & & 0 & \tilde{P}_j \end{pmatrix},$$

где $\tilde{P}_j$ имеет вид (3.58b), а E — единичная 2×2-матрица. — *Прим. перев.*

(ii) P_j является недиагональной 2×2-матрицей вида

$$\begin{pmatrix} r_j & s_j \\ -s_j & r_j \end{pmatrix}; \tag{3.58b}$$

(iii) P_j является недиагональной $n_j \times n_j$-матрицей ($n_j \geqslant 2$) вида

$$\begin{pmatrix} \mu_j & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_j & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_j & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \mu_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \mu_j \end{pmatrix}. \tag{3.58c}$$

При этом числа λ_j, μ_j и $r_j \pm \mathrm{i}s_j$ суть *собственные значения* матрицы A. Используя этот факт и (3.55), покажите, что $\exp(tB^{-1}AB)$ также будет иметь блочно-диагональный вид с соответствующими блоками:

(i) $(e^{t\lambda_j})$; (3.59a)

(ii) $$e^{tr_j}\begin{pmatrix} \cos ts_j & \sin ts_j \\ -\sin ts_j & \cos ts_j \end{pmatrix}; \tag{3.59b}$$

(iii) $$e^{t\mu_j}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \frac{1}{3!}t^3 & \dots \\ 0 & 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & t & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{3.59c}$$

Из (а) следует, что матрица B, приводящая A к канонической форме, приводит к канонической форме и $\exp(tA)$ в случаях (i) и (ii), но в случае (iii) матрица, приводящая $\exp(tA)$ к канонической форме, уже зависит от t.

Заметим, что не каждый элемент группы $GL(n, \mathrm{R})$ принадлежит однопараметрической подгруппе. Это объясняется тем, что такая подгруппа является непрерывной кривой в $GL(n, \mathrm{R})$, вдоль которой определитель изменяется непрерывно. Поскольку определитель в точке e равен 1 и обратиться в нуль на кривой не может, то этим *исключается* существование непрерывной кривой, соединяющей точку e с матрицей, имеющей отрицательный определитель. (Отметим, что в (3.59) представлены лишь матрицы с положительными определителями.) Такие группы называют *несвязными группами*. Итак, мы видим, что для исследования группы Ли в целом, вообще говоря, недостаточно рассматривать лишь её однопараметрические подгруппы или её алгебру Ли. Те элементы, которые можно соединить с точкой e *непрерывным путём* (не обязательно однопараметрической подгруппой), образуют множество, называемое *связной компонентой единицы* данной группы.

Упражнение 3.13. Покажите, что матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

принадлежит связной компоненте единицы группы $GL(n, R)$, но не принадлежит ни одной из однопараметрических подгрупп. (*Указание*: постройте непрерывный путь, соединяющий эту матрицу с $e=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.)

Что представляет собой алгебра Ли группы $GL(n, R)$? Рассмотрим касательный вектор $\bar{A}_e$ в точке e и соответствующую однопараметрическую подгруппу $g_{\bar{A}_e}(t)$; левый сдвиг $fg_{\bar{A}_e}(t)$ этой кривой, осуществляемый посредством произвольной матрицы f из $GL(n, R)$, даёт некоторую кривую из конгруэнции левоинвариантного векторного поля, отвечающего $\bar{A}_e$, как показано на рис. 3.11. Вот каким образом $\bar{A}_e$ порождает левоинвариантное поле; мы обозначим его просто через $\bar{A}$. Если f лежит на проходящей через e кривой $g_{\bar{B}_e}(t)$, которая порождается матрицей $\bar{B}_e$ из T_e, то в силу (2.12) скобка Ли $[\bar{A}, \bar{B}]|_e$ этих двух векторных полей в точке e равна

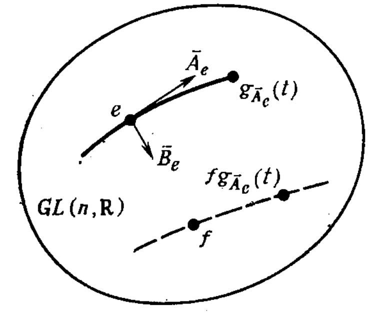

Рис. 3.11. Левый перенос кривой $g_{\bar{A}_e}(t)$ посредством f.

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2}\left[g_{\bar{A}_e}(t)\, g_{\bar{B}_e}(t) - g_{\bar{B}_e}(t)\, g_{\bar{A}_e}(t)\right],$$

и с помощью формулы (3.55) легко вычислить, что

$$[\bar{A}, \bar{B}]|_e = \bar{A}_e\bar{B}_e - \bar{B}_e\bar{A}_e. \tag{3.60}$$

Таким образом, скобка Ли двух произвольных левоинвариантных векторных полей на $GL(n, \mathrm{R})$ в точке e является не чем иным, как обычным *матричным коммутатором* двух матриц, порождающих эти поля. Левоинвариантное векторное поле, порождённое этим коммутатором, есть элемент алгебры Ли $\mathfrak{L}(GL(n, \mathrm{R}))$, которая является скобкой Ли исходных полей.

(iii) Мы уже знаем, что группа вращений есть группа Ли (см. § 2.3 (vi)). Подробное исследование этой группы мы проведем позже, а пока рассмотрим её как подгруппу группы $GL(n, \mathrm{R})$. В § 2.29 было показано, что матрицы A, для которых $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$, являются элементами группы $O(n)$ — ортогональной группы в n-мерном пространстве[1]. Поскольку определитель обладает свойствами

$$\det A = 1/\det(A^{-1}), \quad \det(A) = \det(A^{\mathrm{T}}) \tag{3.61}$$

(см. § 1.6), у матриц из группы $O(n)$ определитель равен ± 1. Матрицы, определитель которых равен $+1$, образуют подгруппу, которая называется специальной ортогональной группой[2] и обозначается через $SO(n)$. Мы сейчас покажем, что это группа вращений. (Матрицы ортогональной группы $O(n)$, определитель которых равен -1, не образуют подгруппы, так как единичная матрица не входит в их число. Подобно $GL(n, \mathrm{R})$ группа $O(n)$ несвязна.)

Упражнение 3.14. (a) Покажите, что если A принадлежит $O(n)$, то её собственные значения совпадают с собственными значениями обратной матрицы A^{-1}. (Воспользуйтесь тем фактом, что для произвольной матрицы B выполняется соотношение $\det B = \det B^{\mathrm{T}}$.) Читатели, позабывшие, что такое собственные значения, найдут их определение в § 1.6.

(b) Покажите, что собственные значения произвольной невырожденной матрицы A суть обратные величины к собственным значениям матрицы A^{-1}. (Используйте то обстоятельство, что $\det(AB) = \det A \det B$.) Выведите отсюда, что собственные значения $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ произвольной матрицы A из $O(n)$ бывают двух типов: либо (i) $\lambda_j = \pm 1$, либо (ii) $\lambda_j \lambda_k = 1$ для $j \neq k$. Покажите, что в случае (ii) собственные значения встречаются парами $(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$, где θ вещественно.

(c) Известно также, что каноническую форму матрицы A из $O(n)$ можно получить посредством преобразования $B^{-1}AB$, где B — матрица из $SO(n)$. Используя этот

[1] В оригинале Orthogonal group in n dimensions. Отсюда обозначение. — *Прим. ред.*

[2] Special Orthogonal group. — *Прим. ред.*

результат, докажите, что произвольная матрица из $O(n)$ имеет каноническую форму, состоящую из блоков

$$\text{(i)}\ (1); \tag{3.62a}$$

$$\text{(ii)}\ (-1); \tag{3.62b}$$

$$\text{(iii)}\ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{3.62c}$$

(d) Покажите, что алгебра Ли группы $O(n)$ состоит из всех антисимметричных матриц. Используя этот результат, докажите, что $O(n)$ имеет размерность $n(n-1)/2$.

Далее, всякую матрицу A из $GL(n, R)$ можно рассматривать как обратимый тензор типа $\binom{1}{1}$ на R^n, переводящий вектор-столбец $\bar{V}$ из R^n в вектор-столбец $A\bar{V}$ (матричное умножение). Преобразование $B^{-1}AB$ есть просто-напросто преобразование *компонент* этого тензора (см. § 2.26) при замене базиса $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ на базис $\{B^{-1}\bar{e}_1, \ldots, B^{-1}\bar{e}_n\}$. Поэтому можно считать, что произвольная матрица из $SO(n)$ эквивалентна последовательным вращениям в независимых двумерных плоскостях, ибо каноническая форма (3.62c), очевидно, задаёт как раз такое вращение, а форма (3.62b) должна встречаться чётное число раз (чтобы определитель был положителен), так что, сгруппировав попарно соответствующие направления, мы получим формы вида (3.62c) с $\theta = \pi$. Итак, группа $SO(n)$ есть группа вращений. (Заметим, что если n нечётно, то каждая матрица из $SO(n)$ оставляет неподвижным по крайней мере одно направление.) Остальные матрицы из $O(n)$ можно трактовать как *отражения* (с вращением), т. е. преобразования, изменяющие ориентацию всякого множества n линейно-независимых векторов. Это — тема следующего упражнения. (Понятие ориентации базиса подробно обсуждается в гл. 4.)

Упражнение 3.15. Покажите, что каноническая форма всякого элемента из $O(n)$, не принадлежащего $SO(n)$, есть произведение матрицы $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, -1, 1, \ldots, 1)$ (имеющей ровно один элемент -1 на диагонали) и канонической формы некоторой матрицы из $SO(n)$. Выведите отсюда, что она является отражением.

Упражнение 3.16. Покажите, что любая матрица из $SO(n)$ является элементом однопараметрической подгруппы. Докажите, что произвольная матрица из $SO(3)$ эквивалентна одному повороту на некоторый угол θ относительно некоторой оси.

Прежде чем расстаться с группой вращений, исследуем её алгебру Ли, по крайней мере для группы $SO(3)$. Векторное пространство T_e есть пространство всех антисимметричных матриц, имеющее размерность три (см. упр. 3.14 (d)). Один из его базисов состоит из матриц

$$L_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad L_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad L_3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}. \tag{3.63}$$

Упражнение 3.17. Покажите, что указанный выше базис алгебры Ли группы $SO(3)$ имеет следующие скобки Ли:

$$[L_1, L_2]=L_3,\quad [L_2, L_3]=L_1,\quad [L_3, L_1]=L_2. \tag{3.64}$$

Вскоре мы ещё вернемся к этой алгебре.

(iv) Ещё одна важная для физики матричная группа — это $SU(n)$, *специальная унитарная группа* в (комплексном) n-мерном пространстве[1]. Это подгруппа в группе $GL(n, C)$ всех комплексных $n\times n$-матриц с ненулевым определителем (так называемой *полной линейной группе* n-мерного комплексного пространства[2]). Поскольку каждый элемент матрицы может быть комплексным, а каждое комплексное число задаётся двумя вещественными, группа $GL(n, C)$ имеет размерность (вещественную) $2n^2$. В ней имеется подгруппа $U(n)$, называемая *унитарной группой*, состоящая из унитарных матриц, т. е. матриц U, удовлетворяющих равенству $U^{-1}=U^*$, где символ $*$ обозначает переход к комплексно-сопряженной транспонированной (эрмитово-сопряжённой) матрице. По аналогии со случаем $O(n)$ алгебра Ли подгруппы $U(n)$ состоит из всех антиэрмитовых $n\times n$-матриц. (Матрица A называется *антиэрмитовой*, если $A^*=-A$.) Эта алгебра Ли имеет вещественную размерность n^2, поскольку антиэрмитова матрица имеет $n(n-1)/2$ произвольных комплексных внедиагональных элементов (задаваемых $n(n-1)$ вещественными числами) и n произвольных чисто мнимых диагональных элементов (которые дают ещё n вещественных измерений, а в итоге полная размерность получается n^2). Подгруппа $SU(n)$ в $U(n)$ — это множество всех матриц $U(n)$ с *единичным определителем*. Поскольку определитель любого элемента $U(n)$ есть комплексное число, по модулю равное единице, равенство единице определителя даёт одно дополнительное условие, поэтому $SU(n)$ имеет размерность n^2-1. Алгебра Ли группы

[1] Special Unitary group in n dimensions. — *Прим. ред.*
[2] General Linear group in n Complex dimensions. — *Прим. ред.*

$SU(n)$ — это множество всех антиэрмитовых матриц с нулевым следом. (След матрицы A есть сумма $a^i{}_i$; см. § 1.6.)

Упражнение 3.18. Покажите, что алгебра Ли группы $SU(n)$ есть множество всех антиэрмитовых матриц с нулевым следом. (Можно воспользоваться тем фактом, что произвольный элемент из $U(n)$ имеет каноническую форму $\operatorname{diag}(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \ldots, e^{i\varphi_n})$, где $\{\varphi_j, j = 1, \ldots, n\}$ — вещественные числа.)

Упражнение 3.19. (a) Покажите, что следующие матрицы образуют базис касательного пространства T_e группы $SU(2)$:

$$J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \tag{3.65}$$

Докажите, что T_e — трёхмерное *вещественное* векторное пространство: хотя сами матрицы и содержат мнимые числа, лишь их линейные комбинации с *вещественными* коэффициентами остаются в T_e.

(b) Покажите, что указанный выше базис алгебры Ли группы $SU(2)$ имеет следующие скобки Ли:

$$[J_1, J_2] = J_3, \quad [J_2, J_3] = J_1, \quad [J_3, J_1] = J_2. \tag{3.66}$$

Формально это идентично (3.66); как мы увидим в следующем параграфе, это указывает на тесную связь между $SU(2)$ и $SO(3)$.

Упражнение 3.20. (a) Пусть $\operatorname{tr}(A) = a^i{}_i$ обозначает след матрицы A. Докажите, что $\operatorname{tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{tr}(A)$.

(b) Используя (a), а также: (i) тот факт, что определитель обладает свойством $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, (ii) соотношение (3.56) и (iii) канонические формы (3.55)—(3.59), докажите, что для произвольной матрицы A выполняется соотношение

$$\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A)). \tag{3.67}$$

(c) Используя (3.67), дайте более простое доказательство утверждения упр. 3.18.

3.16. АЛГЕБРЫ ЛИ И ОТВЕЧАЮЩИЕ ИМ ГРУППЫ ЛИ

Для каждой группы Ли G определена её алгебра Ли ($\mathfrak{g}$). Поскольку каждый элемент g из G есть образ точки e при левом сдвиге, порождённом g, и поскольку каждому вектору из T_e соответствует единственное векторное поле из этой алгебры Ли, то, следовательно, каждая точка g из G принадле-