$SU(n)$ — это множество всех антиэрмитовых матриц с нулевым следом. (След матрицы A есть сумма $a^i{}_i$; см. § 1.6.)

Упражнение 3.18. Покажите, что алгебра Ли группы $SU(n)$ есть множество всех антиэрмитовых матриц с нулевым следом. (Можно воспользоваться тем фактом, что произвольный элемент из $U(n)$ имеет каноническую форму $\operatorname{diag}(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \ldots, e^{i\varphi_n})$, где $\{\varphi_j, j=1, \ldots, n\}$ — вещественные числа.)

Упражнение 3.19. (a) Покажите, что следующие матрицы образуют базис касательного пространства T_e группы $SU(2)$:

$$J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \tag{3.65}$$

Докажите, что T_e — трёхмерное *вещественное* векторное пространство: хотя сами матрицы и содержат мнимые числа, лишь их линейные комбинации с *вещественными* коэффициентами остаются в T_e.

(b) Покажите, что указанный выше базис алгебры Ли группы $SU(2)$ имеет следующие скобки Ли:

$$[J_1, J_2] = J_3, \quad [J_2, J_3] = J_1, \quad [J_3, J_1] = J_2. \tag{3.66}$$

Формально это идентично (3.66); как мы увидим в следующем параграфе, это указывает на тесную связь между $SU(2)$ и $SO(3)$.

Упражнение 3.20. (a) Пусть $\operatorname{tr}(A) = a^i{}_i$ обозначает след матрицы A. Докажите, что $\operatorname{tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{tr}(A)$.

(b) Используя (a), а также: (i) тот факт, что определитель обладает свойством $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, (ii) соотношение (3.56) и (iii) канонические формы (3.55) — (3.59), докажите, что для произвольной матрицы A выполняется соотношение

$$\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A)). \tag{3.67}$$

(c) Используя (3.67), дайте более простое доказательство утверждения упр. 3.18.

3.16. АЛГЕБРЫ ЛИ И ОТВЕЧАЮЩИЕ ИМ ГРУППЫ ЛИ

Для каждой группы Ли G определена её алгебра Ли ($\mathfrak{g}$). Поскольку каждый элемент g из G есть образ точки e при левом сдвиге, порождённом g, и поскольку каждому вектору из T_e соответствует единственное векторное поле из этой алгебры Ли, то, следовательно, каждая точка g из G принадлежит некоторой кривой из каждой левоинвариантной конгруэнции. Можно ли построить группу G, зная лишь её алгебру Ли? Ответ в общем утвердительный, но прежде чем сформулировать его, надо дать более совершенное определение алгебры Ли, нежели то, с которым мы до сих пор работали.

Алгебра Ли — это вещественное векторное пространство V, снабжённое операцией билинейного умножения, обозначаемой через $[\ ,\ ]$ (и называемой *скобкой Ли*), которая двум произвольным векторам $\bar{A}$ и $\bar{B}$ сопоставляет вектор $[\bar{A}, \bar{B}]$, причём должны быть выполнены следующие соотношения:

$$\text{(i)}\quad [\bar{A}, \bar{B}] = -[\bar{B}, \bar{A}], \tag{3.68}$$

$$\text{(ii)}\quad [\bar{A},[\bar{B}, \bar{C}]]+[\bar{B},[\bar{C}, \bar{A}]]+[\bar{C},[\bar{A}, \bar{B}]]=0. \tag{3.69}$$

Существенное различие между этим определением и определением, которое мы дали в § 2.14, состоит в том, что здесь скобка Ли определена *формально*, а именно как операция, обладающая свойствами (i) и (ii), что позволяет работать с операциями *любой* природы, лишь бы они обладали этими свойствами. Одной из таких операций является взятие коммутатора векторных полей, и это была единственная операция, которую мы до сих пор использовали. Другим очевидных примером служит векторное пространство R^3 с обычным векторным произведением

$$[\bar{a}, \bar{b}] \equiv \bar{a} \times \bar{b}. \tag{3.70}$$

Упражнение 3.21. (a) Покажите, что (3.70) удовлетворяет *тождеству Якоби* (3.69).

(b) Покажите, что базис $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$ имеет следующие скобки:

$$[\bar{e}_1, \bar{e}_2] = \bar{e}_3,\quad [\bar{e}_2, \bar{e}_3] = \bar{e}_1,\quad [\bar{e}_3, \bar{e}_1] = e_2. \tag{3.71}$$

Сравните (3.71) с (3.64) и (3.66).

А теперь сформулируем без доказательства теорему, имеющую фундаментальное значение для физики: за каждой алгеброй Ли стоит группа Ли. Точнее, каждая алгебра Ли есть алгебра Ли одной и только одной связной и *односвязной* группы Ли. (Многообразие называется односвязным, если каждая замкнутая кривая может быть гладко стянута в точку. Обсуждение и доказательство этой теоремы для некоторых частных случаев можно найти в книгах Spivak (1970) и Warner (1971).) Более того, любая другая связная группа Ли с той же алгеброй Ли, но не односвязная *накрывается* этой односвязной группой Ли. (Связное многообразие M *накрывает* многообразие N, если существует отображение π многообразия M *на* N, такое что прообраз некоторой окрестности V произвольной точки P многообразия N есть дизъюнктное объединение открытых окрестностей точек из $\pi^{-1}(P)$ в M. Пример накрывающего многообразия приведён на рис. 3.12.) Это накрытие должно быть гомоморфизмом групп. (Определение гомоморфизма в § 1.4.)

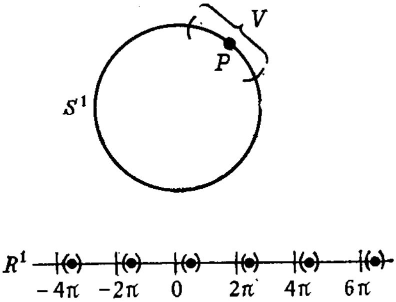

Рис. 3.12. Единичная окружность S^1 бесконечное число раз накрывается вещественной прямой R^1 при отображении π: $R^1 \to S^1$, переводящем точку x в точку $\pi(x)$ на S^1, координатами которой в плоскости R^2 служат $(\cos x, \sin x)$. Множество $\pi^{-1}(V)$ является объединением всех указанных на рисунке открытых интервалов в R^1.

Прекрасной иллюстрацией этой теоремы служат группы $SO(3)$ и $SU(2)$. Прежде всего покажем, что группа $SU(2)$ односвязна. Для этого рассмотрим множество H всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \tag{3.72}$$

где a и b — произвольные комплексные числа (черта обозначает комплексное сопряжение).

Упражнение 3.22. (a) Покажите, что $H \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, подмножество множества H, состоящее из матриц с ненулевым определителем, является группой по умножению и, следовательно, подгруппой Ли в $GL(2, C)$.

(b) Покажите, что H — вещественное векторное пространство (относительно матричного сложения) размерности 4, один из базисов которого образуют матрицы J_1, J_2, J_3 из упр. 3.19 и матрица $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Пусть A — произвольная матрица, принадлежащая H:

$$A = 2\alpha_1 J_1 + 2\alpha_2 J_2 + 2\alpha_3 J_3 + \alpha_4 I,$$

где $\{\alpha_i\}$ — вещественные числа. Покажите, что A принадлежит $SU(2)$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = 1. \tag{3.73}$$

(d) Используя этот факт, покажите, что группа $SU(2)$ допускает 1-1-отображение на трёхмерную сферу S^3, которая является односвязным многообразием. (Другими словами, S^3 и $SU(2)$ диффеоморфны.)

Теперь построим отображение π: $SU(2) \to SO(3)$, являющееся накрытием. Его легко построить, используя экспоненту от элементов алгебры Ли. В $SU(2)$ экспонента элемента J_1 равна

$$\exp(tJ_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\left(\frac{t}{2}\right)^2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{t}{2}\right)^3\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + \ldots = \begin{pmatrix} \cos(t/2) & i\sin(t/2) \\ i\sin(t/2) & \cos(t/2) \end{pmatrix}. \quad (3.74)$$

Экспонента элемента L_1 из $SO(3)$ равна

$$\exp(sL_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{1}{2!}s^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}s^3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \ldots$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos s & -\sin s \\ 0 & \sin s & \cos s \end{pmatrix}. \quad (3.75)$$

Поэтому естественно задать отображение π правилом

$$\pi\colon SU(2) \to SO(3),$$
$$\pi\colon \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2} \\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

Ясно, что это гомоморфизм двух однопараметрических подгрупп, а также что два элемента t и $t + 2\pi$ из $SU(2)$ имеют *один и тот же* образ в $SO(3)$. Далее, значению параметра $t + 4n\pi$, где n — произвольное целое число, отвечает та же точка из $SU(2)$, что и значению t. Тем самым мы доказали, что $\exp(tJ_1)$ — *двулистное накрытие* $\exp(sL_1)$. Это утверждение распространяется на всю группу: отображение

$$t\colon \exp(t_1J_1 + t_2J_2 + t_3J_3) \mapsto \exp(t_1L_1 + t_2L_2 + t_3L_3) \quad (3.77)$$

есть двулистное накрытие группы $SO(3)$ группой $SU(2)$.

Поскольку мы знаем, что у $SU(2)$ та же глобальная топология, что у трёхмерной сферы, построенное двулистное накрытие даёт возможность разобраться в топологии группы $SO(3)$. Однопараметрическая подгруппа $\exp(tJ_1)$ в $SU(2)$ начинается в точке e при $t=0$ и возвращается в неё при $t=4\pi$. На рис. 3.13 эта подгруппа представлена в виде большой окружности сферы S^3. (Следует, однако, помнить, что мы не вводим метрику на группе $SU(2)$. Нас интересует лишь топология в целом, а не метрические отношения.) Точки, обозначенные t и $t+2\pi$, диаметрально противоположны друг другу. Они дают одну и ту же точку из $SO(3)$, поэтому мы просто можем считать, что $SO(3)$ — это *верхняя полусфера* сферы S^3, причём точки экватора, находящиеся на противоположных концах диаметра (т. е. точки $t=\pi$ и $t=3\pi$), *отождествляются* между собой. Эта верхняя полусфера сферы S^3 с указанным отождествлением уже не является односвязной. Такую кривую, как $\mathscr{C}$, можно гладко стянуть в точку, а вот кривую, задаваемую подгруппой $\exp(tL_1)$, — нельзя, поскольку диаметрально противоположные точки на экваторе нельзя свести вместе — они всегда будут оставаться диаметрально противоположными. Эта конструкция делает очевидным и тот факт, что в некоторой окрестности точки e группы $SO(3)$ и $SU(2)$ тождественны. Именно поэтому у них и совпадают алгебры Ли. Такая идентичность в окрестности единицы имеет место для любых двух групп с одинаковыми алгебрами Ли.

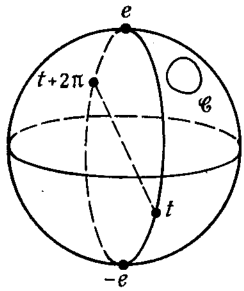

Рис. 3.13. Двумерный „срез" пространства S^3, содержащий однопараметрическую подгруппу $\exp(tJ_1)$ группы $SU(2)$. Группа $SO(3)$ есть верхняя полусфера, причём точки на противоположных концах диаметров отождествляются.

Какой же из этих двух групп соответствует алгебра Ли, определяемая соотношением (3.70)? Это всецело вопрос интерпретации. Как абстрактная алгебра Ли она соответствует обеим группам. Как конкретную алгебру векторов в R^3 её обычно связывают с группой $SO(3)$, а именно говорят, что подгруппе $\exp(\theta L_1)$ (поворот на угол θ относительно оси x) соответствует «кривая» $\exp(\theta\bar{e}_1)$ в R^3 (вектор вдоль оси x длины θ). Это сопоставление повороту вектора общепринято у физиков, особенно когда вращение происходит во времени — тогда скорости вращения сопоставляется вектор угловой скорости. Возможность такого удобного отождествления — чисто случайная вещь, связанная с трёхмерностью нашего пространства; группа $SO(4)$ имеет размерность 6, а размерность векторного пространства R^4, на котором эта группа действует, равна 4, и здесь подобное отождествление уже невозможно. Но вернёмся к алгебре Ли R^3 (с операцией векторного произведения). Её можно отождествить и с алгеброй Ли группы $SU(2)$, способом, аналогичным описанному выше. В § 3.18 мы увидим, что это даёт возможность сопоставить спину частицы некоторый вектор в R^3, хотя спин и не является элементом из T_P для какой-либо точки P в R^3.

Заканчивая наш разговор об алгебрах Ли, отметим, что мы теперь в состоянии доказать, что абелева алгебра Ли — это алгебра Ли абелевой группы Ли. Абелева алгебра Ли размерности n — это просто векторное пространство и как таковое является алгеброй Ли группы Ли R^n (см. § 3.15). Поскольку группа R^n односвязна, любая другая группа Ли с той же алгеброй Ли должна накрываться группой R^n и должна быть тождественна с ней в окрестности начала координат e. Поскольку R^n — абелева группа ($\bar{V}+\bar{W}=\bar{W}+\bar{V}$), абелевой будет и любая другая (связная) группа, имеющая абелеву алгебру Ли.

3.17. РЕАЛИЗАЦИИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Обычно всякую группу лучше всего рассматривать как *абстрактную группу*, всецело определяемую групповой операцией, а в случае групп Ли ещё и структурой многообразия. Таким образом, $SO(3)$ как абстрактная группа — это просто определённое трёхмерное многообразие, на котором действует определённое правило, по которому паре элементов g и h ставится в соответствие точка gh, их произведение; это правило должно подчиняться обычным аксиомам группы. Для физиков эта абстрактная структура — не самый интересный аспект теории групп. Для них важнее знать, где *действует* группа и как. Группа $SO(3)$ играет такую большую роль потому, что с каждой её точкой ассоциировано вращение нашего трёхмерного пространства. Такое соответствие называется реализацией группы. Точнее, *реализация* данной группы G — это соотнесение каждому элементу g из G преобразования $T(g)$ некоторого пространства M, при котором сохраняются групповые свойства: (i) $T(e)=I$ (тождественное преобразование, оставляющее все точки M на месте); (ii) $T(g^{-1})=[T(g)]^{-1}$; (iii) $T(g)\circ T(h)=T(gh)$. Если это соответствие взаимно-однозначно, ($T(g)\neq T(h)$ при $g\neq h$), то мы имеем *точную* реализацию. В случае когда M — векторное пространство, а каждое $T(g)$ — линейное преобразование (т. е. тензор типа $\binom{1}{1}$ на этом векторном пространстве),