пространства; группа $SO(4)$ имеет размерность 6, а размерность векторного пространства R^4, на котором эта группа действует, равна 4, и здесь подобное отождествление уже невозможно. Но вернёмся к алгебре Ли R^3 (с операцией векторного произведения). Её можно отождествить и с алгеброй Ли группы $SU(2)$, способом, аналогичным описанному выше. В § 3.18 мы увидим, что это даёт возможность сопоставить спину частицы некоторый вектор в R^3, хотя спин и не является элементом из T_P для какой-либо точки P в R^3.

Заканчивая наш разговор об алгебрах Ли, отметим, что мы теперь в состоянии доказать, что абелева алгебра Ли — это алгебра Ли абелевой группы Ли. Абелева алгебра Ли размерности n — это просто векторное пространство и как таковое является алгеброй Ли группы Ли R^n (см. § 3.15). Поскольку группа R^n односвязна, любая другая группа Ли с той же алгеброй Ли должна накрываться группой R^n и должна быть тождественна с ней в окрестности начала координат e. Поскольку R^n — абелева группа $(\bar{V}+\bar{W}=\bar{W}+\bar{V})$, абелевой будет и любая другая (связная) группа, имеющая абелеву алгебру Ли.

3.17. РЕАЛИЗАЦИИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Обычно всякую группу лучше всего рассматривать как *абстрактную группу*, всецело определяемую групповой операцией, а в случае групп Ли ещё и структурой многообразия. Таким образом, $SO(3)$ как абстрактная группа — это просто определённое трёхмерное многообразие, на котором действует определённое правило, по которому паре элементов g и h ставится в соответствие точка gh, их произведение; это правило должно подчиняться обычным аксиомам группы. Для физиков эта абстрактная структура — не самый интересный аспект теории групп. Для них важнее знать, где *действует* группа и как. Группа $SO(3)$ играет такую большую роль потому, что с каждой её точкой ассоциировано вращение нашего трёхмерного пространства. Такое соответствие называется реализацией группы. Точнее, *реализация* данной группы G — это соотнесение каждому элементу g из G преобразования $T(g)$ некоторого пространства M, при котором сохраняются групповые свойства: (i) $T(e)=I$ (тождественное преобразование, оставляющее все точки M на месте); (ii) $T(g^{-1})=[T(g)]^{-1}$; (iii) $T(g)\circ T(h)=T(gh)$. Если это соответствие взаимно-однозначно, $(T(g)\neq T(h)$ при $g\neq h)$, то мы имеем *точную* реализацию. В случае когда M — векторное пространство, а каждое $T(g)$ — линейное преобразование (т. е. тензор типа $\binom{1}{1}$ на этом векторном пространстве), реализация называется *представлением*. Поясним эти понятия на примерах.

(i) Рассмотрим вращения единичной сферы S^2, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2=1$ в R^3. Предположим, выполнен поворот относительно оси x на угол θ. В результате этого поворота точка на сфере, имеющая координаты (x, y, z), отобразится в точку (x', y', z') с координатами

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y\cos\theta - z\sin\theta, \\ z' &= y\sin\theta + z\cos\theta, \end{aligned} \tag{3.78}$$

по-прежнему принадлежащую нашей сфере, поскольку $(x')^2+(y')^2+(z')^2=1$. Это преобразование отвечает элементу $\exp(\theta L_1)$ группы $SO(3)$, в обозначениях (3.63). Любому элементу этой группы соответствует некоторое преобразование сферы S^2 в себя. Поскольку S^2 — многообразие, но не векторное пространство, мы имеем реализацию группы $SO(3)$. Но то же самое преобразование (3.78) можно рассматривать и как отображение всего пространства R^3 в себя, а не только сферы S^2 в себя. Поскольку R^3 — векторное пространство, мы получаем представление группы $SO(3)$ посредством матриц, преобразующих векторы пространства R^3 в векторы того же пространства. С помощью этих самых матриц мы и определили группу $SO(3)$ в самом начале. Этот пример служит демонстрацией весьма тонкого, но полезного подхода. Как правило, группа определяется сначала при помощи той или иной (точной) реализации либо представления, так как это даёт возможность конкретно изучить все свойства группы. Затем, однако, целесообразно рассматривать её как абстрактную группу, ибо могут быть и другие полезные представления или реализации, которые до сего были неизвестны. В следующем параграфе мы укажем также представления и реализации для группы вращения.

(ii) У каждой группы есть по меньшей мере две точные реализации: левый и правый сдвиги по себе. Произвольный элемент g группы G определяет её преобразование, при котором точка h отображается в точку gh (*прогрессивная*, или *главная*, реализация), а также преобразование, при котором h отображается в hg^{-1} (*регрессивная* реализация).

(iii)[1] Все изучавшиеся выше матричные группы: $GL(nR)$, $O(n)$, $SO(n)$, $GL(n, C)$, $U(n)$, $SU(n)$ — мы изучали при помощи их точных представлений в виде матричных преобразований n-мерных вещественных либо комплексных векторных пространств. Но каждая группа Ли G допускает ещё пред-

---

[1] Этот пример даётся в качестве дополнительного материала

ставление в виде линейных преобразований на своей собственной алгебре Ли; оно называется *присоединённым представлением* и определяется следующим образом. Рассмотрим сначала отображение группы G в себя $I_g : h \mapsto ghg^{-1}$. Это — *присоединенная реализация* группы G; преобразование, отвечающее элементу g, состоит в левом сдвиге на g и правом сдвиге на g^{-1}. (Эта реализация не обязательно точная: если G — абелева группа, то I_g — тождественное отображение $h \mapsto h$ для всех g.) Такие преобразования называются *внутренними автоморфизмами* группы G. Заметим, что каждое I_g

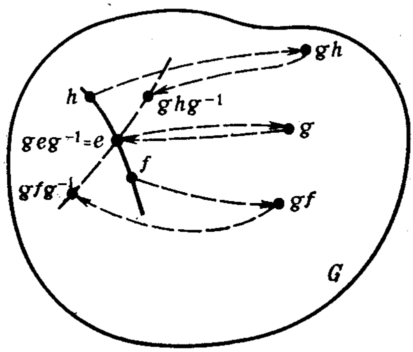

Рис. 3.14. Что происходит с кривой, проходящей через точку e, при отображении $h \mapsto ghg^{-1}$, показано в два этапа. Сначала действует отображение $h \mapsto gh$, затем $gh \mapsto ghg^{-1}$. Единичная точка e отображается в себя, но близкие к ней точки h и f обычно изменяются, так что касательный вектор в точке e отображается в некоторый другой вектор.

отображает единичный элемент e в себя, так что каждая кривая, проходящая через e, отображается в кривую, также проходящую через e (вообще говоря, другую), см. рис. 3.14. Поэтому I_g индуцирует отображение произвольного касательного вектора из T_e в касательный же вектор. Это отображение, обозначаемое через Ad_g, называется *присоединённым преобразованием* пространства T_e, индуцированным элементом g. Если кривая, изображённая на рис. 3.14 сплошной линией, есть, скажем, однопараметрическая подгруппа $\exp(t\bar{X})$, где $\bar{X}$ принадлежит T_e, то её образ при действии внутреннего автоморфизма I_g будет тоже однопараметрической подгруппой, поскольку $g(fh)g^{-1} = (gfg^{-1})(ghg^{-1})$. Следовательно, штриховая кривая на рис. 3.14 есть однопараметрическая подгруппа, порождённая вектором $\mathrm{Ad}_g(\bar{X})$:

$$I_g[\exp(t\bar{X})] = \exp[t\,\mathrm{Ad}_g(\bar{X})]. \qquad (3.79)$$

Если элемент g сам принадлежит некоторой однопараметрической подгруппе $g(s) = \exp(s\bar{Y})$, то вектор $\mathrm{Ad}_g(\bar{X})$ должен некоторым естественным образом выражаться через $\bar{Y}$. Такое выражение для $\mathrm{Ad}_g(\bar{X})$ дано в следующем упражнении.

Упражнение 3.23. Покажите, что

$$\mathrm{Ad}_{g(s)}(\bar{X}) = \exp(s\pounds_{\bar{Y}})\bar{X}. \tag{3.80}$$

3.18. СФЕРИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ, СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ

Выше мы рассматривали векторы Киллинга и их связь с симметриями эвклидова пространства. Конкретизируем теперь эти понятия на примере сферической симметрии. Говорят, что многообразие M с метрическим тензором $\mathbf{g}$ обладает *сферической симметрией*, если алгебра Ли её векторных полей Киллинга содержит в качестве подалгебры (т. е. подпространства, скобки элементов которого снова принадлежат ему же) алгебру Ли группы $SO(3)$. О подалгебре приходится говорить, так как тензор $\mathbf{g}$ может иметь и другие симметрии; нас же интересуют здесь только те, которые связаны с его сферической природой. Обратим внимание читателя, что было бы неверно говорить, что M сферично «относительно некоторой точки», так как «центры» соответствующих сфер могут и не принадлежать M (см. рис. 3.15). Наше определение является внутренним: указанная выше подалгебра Ли определяется через векторные поля на самом многообразии M. В § 3.9 было показано, что алгебра Ли векторных полей $\{\bar{l}_x, \bar{l}_y, \bar{l}_z\}$ задаётся соотношениями (3.30). Полагая $\bar{V}_1 = -\bar{l}_x$, $\bar{V}_2 = -\bar{l}_y$ и $\bar{V}_3 = -\bar{l}_z$, мы видим, что алгебра Ли векторных полей $\{\bar{V}_z\}$ тождественна алгебре Ли группы $SO(3)$, задаваемой соотношениями (3.64). Отсюда следует, что данное нами определение сферической симметрии влечёт существование слоения многообразия M, слои которого имеют геометрию сферы (определение слоений см. в § 3.7).

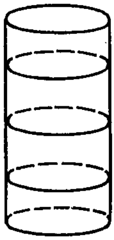

Рис. 3.15. Цилиндрическая поверхность имеет осевую симметрию, но центры окружностей симметрии не принадлежат этой поверхности.

Рассмотрим теперь функции, определённые на двумерной сфере S^2. Всякая функция на M задаёт такую функцию на каждой из её сфер — слоёв симметрии. Определим пространство функций $L^2(S^2)$ как гильбертово пространство всех комплекснозначных квадратично-интегрируемых функций на S^2, т. е. функций, для которых существует

$$\|f\| = \left[\int_{S^2} |f|^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi\right]^{1/2} \tag{3.81}$$