некоторым естественным образом выражаться через $\bar{Y}$. Такое выражение для $\mathrm{Ad}_g(\bar{X})$ дано в следующем упражнении.

Упражнение 3.23. Покажите, что

$$\mathrm{Ad}_{g(s)}(\bar{X}) = \exp(s\mathcal{L}_{\bar{Y}})\bar{X}. \qquad (3.80)$$

3.18. СФЕРИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ, СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ

Выше мы рассматривали векторы Киллинга и их связь с симметриями эвклидова пространства. Конкретизируем теперь эти понятия на примере сферической симметрии. Говорят, что многообразие M с метрическим тензором $\mathbf{g}$ обладает *сферической симметрией*, если алгебра Ли её векторных полей Киллинга содержит в качестве подалгебры (т. е. подпространства, скобки элементов которого снова принадлежат ему же) алгебру Ли группы $SO(3)$. О подалгебре приходится говорить, так как тензор $\mathbf{g}$ может иметь и другие симметрии; нас же интересуют здесь только те, которые связаны с его сферической природой. Обратим внимание читателя, что было бы неверно говорить, что M сферично «относительно некоторой точки», так как «центры» соответствующих сфер могут и не принадлежать M (см. рис. 3.15). Наше определение является внутренним: указанная выше подалгебра Ли определяется через векторные поля на самом многообразии M. В § 3.9 было показано, что алгебра Ли векторных полей $\{\bar{l}_x, \bar{l}_y, \bar{l}_z\}$ задаётся соотношениями (3.30). Полагая $\bar{V}_1 = -\bar{l}_x$, $\bar{V}_2 = -\bar{l}_y$ и $\bar{V}_3 = -\bar{l}_z$, мы видим, что алгебра Ли векторных полей $\{\bar{V}_z\}$ тождественна алгебре Ли группы $SO(3)$, задаваемой соотношениями (3.64). Отсюда следует, что данное нами определение сферической симметрии влечёт существование слоения многообразия M, слои которого имеют геометрию сферы (определение слоений см. в § 3.7).

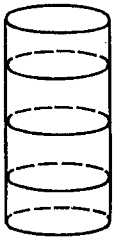

Рис. 3.15. Цилиндрическая поверхность имеет осевую симметрию, но центры окружностей симметрии не принадлежат этой поверхности.

Рассмотрим теперь функции, определённые на двумерной сфере S^2. Всякая функция на M задаёт такую функцию на каждой из её сфер — слоёв симметрии. Определим пространство функций $L^2(S^2)$ как гильбертово пространство всех комплекснозначных квадратично-интегрируемых функций на S^2, т. е. функций, для которых существует

$$\|f\| = \left[\int_{S^2} |f|^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi\right]^{1/2} \qquad (3.81)$$

(норма f), где интеграл берётся по обычному элементу площади сферы. (Наше определение этого пространства не совсем аккуратно, но достаточно для тех целей, которые стоят перед ними.) Пространство $L^2(S^2)$ есть бесконечномерное векторное пространство. Его элементами являются функции, линейные комбинации которых берутся с произвольными постоянными коэффициентами; никакое конечное множество функций не образует базиса. Реализация элемента g группы $SO(3)$ как отображения $R(g)$ сферы S^2 порождает отображение, переводящее произвольную функцию $f(x^i)$ на сфере в другую функцию на сфере, получаемую простым сдвигом аргумента. Тем самым $R(g)$ определяет представление группы $SO(3)$ в векторном пространстве $L^2(S^2)$, и это представление будет уже бесконечномерным, поскольку $L^2(S^2)$ бесконечномерно. Возникает вопрос, существуют ли конечномерные подпространства пространства $L^2(S^2)$, также дающие представления группа $SO(3)$? Каждое такое подпространство должно быть *инвариантным* относительно группы $SO(3)$ в том смысле, что функция $R(g)[f]$ для любого элемента g из $SO(3)$ и любой функции f, принадлежащей этому подпространству, снова должна принадлежать ему. Предположим, такое подпространство существует и функции $\{f_i, i=1, \ldots, N\}$ образуют его базис. Это подпространство инвариантно тогда и только тогда, когда для произвольных чисел $\{a^i\}$ существуют числа $\{b^i\}$, такие что

$$R(g)[a^j f_j] = b^i f_i. \tag{3.82}$$

Поскольку рассматриваемое отображение линейно, имеет место соотношение

$$b^i = g^i{}_j a^j, \tag{3.83}$$

которое определяет матрицу $g^i{}_j$, соответствующую элементу g группы $SO(3)$. Эта матрица и будет представлением элемента g в данном подпространстве. Будем говорить, что представление группы $SO(3)$ в векторном пространстве V (а также и само V) *неприводимо*, если V не содержит ни одного конечномерного подпространства, инвариантного относительно $SO(3)$.

Конструкция неприводимых представлений группы $SO(3)$ в подпространствах $L^2(S^2)$ описана во многих работах (см. Гельфанд, Минлос и Шапиро, 1963). Базисные функции неприводимых подпространств хорошо известны всем физикам как *сферические гармоники* Y_{lm}. Мы не будем заниматься построением этих гармоник, а просто попытаемся истолковать их в наших терминах. Утверждается следующее. Каждое неприводимое подпространство пространства $L^2(S^2)$ характеризуется некоторым целым числом $l \geqslant 0$ и имеет размерность, равную $2l+1$. Функции $\{Y_{lm},\ m=-l, \ldots, l\}$ суть базисные функции для этого подпространства, которое мы обозначим через V_l. Далее, объединение всех этих базисов для всех l служит базисом для самого пространства $L^2(S^2)$; другими словами, сферические гармоники образуют *полную систему функций*. Поскольку любое отображение $R(g)$ сферы S^2 в себя является экспонентой от некоторой линейной комбинации векторов $\{\bar{l}_x, \bar{l}_y, \bar{l}_z\}$, подпространство V_l инвариантно относительно группы $SO(3)$ тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно $\bar{l}_x$, $\bar{l}_y$ и $\bar{l}_z$. В тривиальном случае $l=0$ базисная функция $Y_{00}=1$ имеет производные Ли

$$\bar{l}_x(Y_{00})=\bar{l}_y(Y_{00})=\bar{l}_z(Y_{00})=0,$$

которые, разумеется, все линейно-зависимы с Y_{00}. Более содержателен случай $l=1$, где мы имеем три базисные функции

$$Y_{1\,-1}=\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\sin\theta e^{-i\varphi}, \quad Y_{10}=\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2}\cos\theta,$$

$$Y_{11}=\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\sin\theta e^{i\varphi}. \tag{3.84}$$

Упражнение 3.24. (а) Покажите, что если x, y, z — декартовы координаты в R^3, то на сфере S^2, определяемой уравнением $x^2+y^2+z^2=1$, выполняются следующие соотношения:

$$Y_{1\,-1}=\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}(x-iy), \quad Y_{10}=\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2}z,$$

$$Y_{11}=\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}(x+iy). \tag{3.85}$$

(b) Вычислите все производные $\bar{l}_jY_{1k}$, в частности проверьте, что

$$\bar{l}_x(Y_{1\,-1})=-iY_{10}/2^{1/2}, \quad \bar{l}_z(Y_{11})=iY_{11}, \tag{3.86}$$

и убедитесь, что пространство Y_1 инвариантно относительно $SO(3)$.

Почему для V_1 берётся именно этот базис? В основном ради удобства. Удобно, когда базис состоит из собственных функций относящихся к делу операторов, т. е. функций, удовлетворяющих соотношению

$$Af=\alpha f, \tag{3.87}$$

где A — рассматриваемый оператор, а α — константа. Сферические гармоники пользуются предпочтением потому, что они являются собственными функциями одновременно для оператора $\bar{l}_z$ и оператора $L^2=(\pounds_{\bar{l}_x})^2+(\pounds_{\bar{l}_y})^2+(\pounds_{\bar{l}_z})^2$, определённого в упр. 3.7. Следующее упражнение показывает, что это большее, на что можно рассчитывать: нельзя найти нетривиальные собственные функции сразу для двух из операторов $\{\bar{l}_x, \bar{l}_y, \bar{l}_z\}$.

Упражнение 3.25. Предположим, что функция f удовлетворяет условиям

$$\bar{l}_x(f) = \alpha f, \quad \bar{l}_y(f) = \beta f,$$

где α и β — некоторые константы. Используя (3.30), покажите, что

$$\alpha = \beta = \bar{l}_z(f) = 0.$$

Между прочим, полнота системы сферических гармоник проистекает из того факта, что $i\bar{l}_z$ и L^2 — коммутирующие операторы (см. упр. 3.7), которые являются самосопряжёнными операторами в $L^2(S^2)$ (точнее, могут быть «расширены» до таких операторов). Спектральная теорема из функционального анализа (см. Рисс и Сёкефальви-Надь, 1979) гарантирует полноту системы их собственных функций.

В действительности представления группы $SO(3)$ можно изучать гораздо более абстрактно, чем мы это делали выше. В частности, для того чтобы развить большую часть относящейся сюда алгебры, нет нужды знать, что́ представляет собой векторное пространство V. Например, наше исходное представление группы $SO(3)$ в виде матриц, преобразующих векторы пространства R^3, безусловно неприводимо, поскольку ни одно подпространство в R^3, за исключением тривиального подпространства $\{0\}$, не является инвариантным относительно вращений. Оказывается, это представление формально *идентично* представлению в пространстве, порождённом сферическими гармониками с $l = 1$, размерность которого также равна трём ($= 2l + 1$). Фактически соотношения (3.85) — это просто преобразование координат в R^3, от (x, y, z) к $(Y_{1\,-1}, Y_{10}, Y_{11})$. В это преобразование входят комплексные числа, но если подходить к делу формально алгебраически, то матрицы $g^i{}_j$ (см. (3.83)), отвечающие базису из сферических гармоник, можно преобразовать в матрицы, отвечающие обычному декартову базису, и окажется, что это будут именно те матрицы, с помощью которых мы в самом начале определили группу $SO(3)$.

Упражнение 3.26. Пусть $\{y^{j'}, j = 1, 2, 3\}$ обозначают функции $(Y_{1\,-1}, Y_{10}, Y_{11})$, а $\{x^j\}$ — функции $\{x, y, z\}$. Найдите матрицу перехода $\Lambda^{j'}{}_k = \partial y^{j'}/\partial x^k$ и её обратную $\Lambda^k{}_{j'}$. Используя метод упр. 3.24 (b), найдите матрицу $X^{j'}{}_{k'}$ оператора $\bar{l}_x$ в базисе сферических гармоник:

$$\bar{l}_x(y^{j'}) = X^{j'}{}_{k'} y^{k'}.$$

Вычислите, во что перейдет матрица $X^{l'}{}_{k'}$ при переходе к декартовому базису:

$$X^l_k = \Lambda^l{}_{l'} \Lambda^{r'}{}_k X^{l'}{}_{r'},$$

и убедитесь, что получится в точности матрица $-L_1$ (см. (3.63)).

Отметим, что представление, отвечающее $l=1$, есть наименьшее точное представление группы $SO(3)$ (представление, отвечающее $l=0$, очевидно, не является точным). Его обычно называют *фундаментальным представлением* группы $SO(3)$. В § 4.29, посвящённое векторным сферическим гармоникам, мы познакомимся ещё с одним множеством неприводимых представлений группы $SO(3)$. Там пространство представления будет уже не пространством функций на сфере, а пространством векторных полей на сфере.

И наконец, следует сказать несколько слов относительно связи между представлениями группы $SO(3)$ и накрывающей её группы $SU(2)$. (Те читатели, которые не проштудировали § 3.16, смело могут пропустить это место.) Поскольку существует единственный элемент группы $SO(3)$, ассоциированный с данным элементом группы $SU(2)$, то всякое представление R группы $SO(3)$ автоматически определяет представление S группы $SU(2)$: для произвольного элемента u из $SU(2)$ в качестве преобразования $S(u)$ берём $R(\pi(u))$. Если элементам u и u' отвечает один и тот же элемент группы $SO(3)$, то для так построенного представления $S(u)=S(u')$. Но у $SU(2)$ имеются и другие представления, скажем T, для которых $T(u)\neq T(u')$, даже если $\pi(u)=\pi(u')$. Эти представления иногда называют *двузначными представлениями* группы $SO(3)$. Снова мы просто приведём здесь результат: неприводимые представления группы $SU(2)$ определяются индексом $k \geqslant 0$, который может быть либо целым, либо полуцелым числом. Те представления, для которых k — целое число, являются представлениями группы $SO(3)$, отвечающие тому же индексу (т. е. $l=k$). Прочие представления суть двузначные представления группы $SO(3)$. Примером такого двузначного представления может служить матричное представление в двумерном комплексном пространстве, которое мы использовали для определения группы $SU(2)$. Для этого представления $k=\frac{1}{2}$, и называется оно *спинорным представлением со спином* $\frac{1}{2}$. Подобно представлению с $l=1$ для группы $SO(3)$, данное представление является наименьшим точным представлением для группы $SU(2)$. Если взять произвольный базисный вектор в пространстве этого представления (называемый *спинором*) и подействовать на него однопараметрической подгруппой $\exp(tJ_1)$, где t пробегает значения от 0 до 4π, то, как нетрудно видеть, соответствующий путь в $SO(3)$, а именно $\exp(tL_1)$ *дважды* пройдет от 0 до 2π: когда мы дойдем до значения $t = 2\pi$, мы вернёмся опять в начальную точку в группе $SO(3)$, но в группе $SU(2)$ мы окажемся в точке $-e$. Поэтому говорят, что при повороте на угол 2π спинор меняет знак ($e \to -e$).

Поистине удивительно, что описанное выше соответствие между представлениями — не просто математическая забава. Волновая функция элементарной частицы со спином $\frac{1}{2}$ есть элемент пространства неприводимого представления группы $SU(2)$ для соответствующего полуцелого k. Вот пример того, что физик назвал бы изумительной простотой природы. Мы начинаем с алгебры Ли группы вращений и находим, что простейшей из групп, имеющих ту же алгебру Ли, т. е. наиболее просто устроенной топологически, будет $SU(2)$, а не $SO(3)$. А затем мы находим, что, несмотря на трудности наглядного представления действия группы $SU(2)$ в R^3, природа посчитала именно её более фундаментальной, создав частицы, соответствующие тем из её представлений, которые не являются представлениями группы $SO(3)$!

3.19. БИБЛИОГРАФИЯ

Несколько старомодное, но весьма полное изложение теории производных Ли даёт книга K. Yano, The Theory of Lie Derivatives and its Applications (North-Holland, Amsterdam, 1955).

Теоремы о полноте для самосопряжённых операторов можно найти в «Лекциях по функциональному анализу» Ф. Рисса и Б. Сёкефальви-Надя (М.: Мир, 1979).

Анализ тесной взаимосвязи, существующей между группами Ли и производными Ли, дан в книгах: F. W. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups (Scott, Foresman, Glenview, Ill, 1971); M. Spivak, A. Comprehensive Introduction to Differential Geometry (Publish or Perish, Boston, 1970), vol. 1; L. Auslander & R. E. Mac-Kenzie, Introduction to Differentiable Manifolds (McGraw-Hill, New York, 1963).

Более подробную информацию о группах Ли можно найти в монографиях R. Hermann, Lie Groups for Physicists (Benjamin, Reading, Mass., 1966) или H. Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics (Dover, New York, 1950). Теория представления для наиболее важных групп излагается в большинстве руководств по квантовой механике, например в указанной выше книге Г. Вейля; см. также H. Lipkin, Lie Groups for Pedestrians (North-Holland, Amsterdam, 1966); М. А. Наймарк, Линейные представления группы Лоренца (М.: Физматгиз, 1958); И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос и З. Я. Шапиро, Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения (М.: Физматгиз, 1958).

Полезным справочным пособием по матричной алгебре, на которое мы неоднократно ссылались, является книга M. W. Hirsch, & S. Smale, Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra (Academic Press, New York, 1974).