значения от 0 до 4π, то, как нетрудно видеть, соответствующий путь в $SO(3)$, а именно $\exp(tL_1)$ *дважды* пройдет от 0 до 2π: когда мы дойдем до значения $t = 2\pi$, мы вернёмся опять в начальную точку в группе $SO(3)$, но в группе $SU(2)$ мы окажемся в точке $-e$. Поэтому говорят, что при повороте на угол 2π спинор меняет знак $(e \to -e)$.

Поистине удивительно, что описанное выше соответствие между представлениями — не просто математическая забава. Волновая функция элементарной частицы со спином $\frac{1}{2}$ есть элемент пространства неприводимого представления группы $SU(2)$ для соответствующего полуцелого k. Вот пример того, что физик назвал бы изумительной простотой природы. Мы начинаем с алгебры Ли группы вращений и находим, что простейшей из групп, имеющих ту же алгебру Ли, т. е. наиболее просто устроенной топологически, будет $SU(2)$, а не $SO(3)$. А затем мы находим, что, несмотря на трудности наглядного представления действия группы $SU(2)$ в R^3, природа посчитала именно её более фундаментальной, создав частицы, соответствующие тем из её представлений, которые не являются представлениями группы $SO(3)$!

3.19. БИБЛИОГРАФИЯ

Несколько старомодное, но весьма полное изложение теории производных Ли даёт книга K. Yano, The Theory of Lie Derivatives and its Applications (North-Holland, Amsterdam, 1955).

Теоремы о полноте для самосопряжённых операторов можно найти в «Лекциях по функциональному анализу» Ф. Рисса и Б. Сёкефальви-Надя (М.: Мир, 1979).

Анализ тесной взаимосвязи, существующей между группами Ли и производными Ли, дан в книгах: F. W. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups (Scott, Foresman, Glenview, Ill, 1971); M. Spivak, A. Comprehensive Introduction to Differential Geometry (Publish or Perish, Boston, 1970), vol. 1; L. Auslander & R. E. Mac-Kenzie, Introduction to Differentiable Manifolds (McGraw-Hill, New York, 1963).

Более подробную информацию о группах Ли можно найти в монографиях R. Hermann, Lie Groups for Physicists (Benjamin, Reading, Mass., 1966) или H. Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics (Dover, New York, 1950). Теория представления для наиболее важных групп излагается в большинстве руководств по квантовой механике, например в указанной выше книге Г. Вейля; см. также H. Lipkin, Lie Groups for Pedestrians (North-Holland, Amsterdam, 1966); М. А. Наймарк, Линейные представления группы Лоренца (М.: Физматгиз, 1958); И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос и З. Я. Шапиро, Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения (М.: Физматгиз, 1958).

Полезным справочным пособием по матричной алгебре, на которое мы неоднократно ссылались, является книга M. W. Hirsch, & S. Smale, Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra (Academic Press, New York, 1974).