дифференцируемое семейство таких отображений (фактически — однопараметрическую группу Ли с законом композиции $\Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2$). Такое отображение мы будем называть *переносом*[1] *вдоль конгруэнции* или *переносом Ли* (*ли-переносом*).

3.2. ДЕЙСТВИЕ ПЕРЕНОСА ЛИ НА ФУНКЦИИ

Пусть f — некоторая функция на многообразии. В результате переноса вдоль конгруэнции на $\Delta\lambda$ функции f очевидным образом ставится в соответствие новая функция $f^*_{\Delta\lambda}$: если точка P некоторой кривой (см. рис. 3.1) переходит в точку Q той же кривой на параметрическом расстоянии $\Delta\lambda$ от P, то значение новой функции $f^*_{\Delta\lambda}$ в точке Q равно значению f в точке P:

◆ $$f(P) = f^*_{\Delta\lambda}(Q).$$

(Здесь звёздочка в обозначении функции $f^*_{\Delta\lambda}$ означает просто «новая».) Если случится так, что для каждой точки Q значение $f^*_{\Delta\lambda}(Q)$ окажется равным $f(Q)$ — старому значению в точке Q, т. е.

$$f = f^*_{\Delta\lambda},$$

то мы говорим, что функция f *инвариантна* относительно переноса Ли на $\Delta\lambda$. Если функция инвариантна для всех $\Delta\lambda$, то говорят, что она является *ли-тянутой*[2]. Ясно, что всякая ли-тянутая функция f должна быть постоянной вдоль любой кривой данной конгруэнции, т. е. $df/d\lambda = 0$.

3.3. ДЕЙСТВИЕ ПЕРЕНОСА ЛИ НА ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Прежде чем говорить о действии описанного выше отображения переноса Ли на векторные поля, напомним, что всякое векторное поле определяется конгруэнцией кривых, для которой оно является касательным полем. На рис. 3.2 показаны две конгруэнции: одна, для поля $d/d\lambda$, порождает отображение данного многообразия; это порождённое ею отображение действует на другую конгруэнцию, определяющую произвольное поле $d/d\mu$. Действие это очень простое: любая кривая μ-конгруэнции отображается в новую кривую, получаемую в результате переноса Ли точек первой кривой; значения параметра μ также переносятся в новые точки. Итак, мы

---

[1] В оригинале dragging (буквально: волочение). Иногда используют также термин «увлечение». — *Прим. ред.*

[2] В оригинале Lie dragged. — *Прим. ред.*

определили новую конгруэнцию с параметром $\mu^*_{\Delta\lambda}$. Эта новая конгруэнция имеет касательное векторное поле $d/d\mu^*_{\Delta\lambda}$, которое и называется образом векторного поля $d/d\mu$ при рассматриваемом переносе Ли.

Вообще говоря, $\mu^*_{\Delta\lambda}$- конгруэнция будет отлична от μ-конгруэнции. Если эти конгруэнции одинаковы, то мы всюду имеем $d/d\mu^*_{\Delta\lambda} = d/d\mu$ и в таком случае говорим, что векторное поле и конгруэнция инвариантны относительно нашего

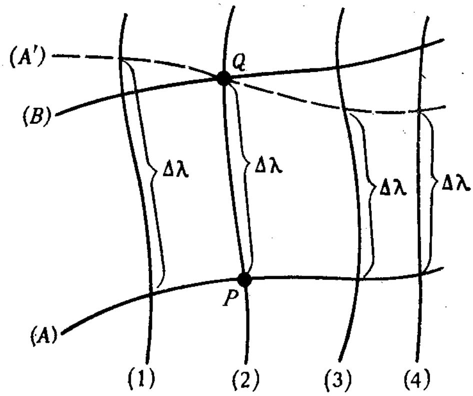

Рис. 3.2. Как новое векторное поле $d/d\mu^*_{\Delta\lambda}$ получается из старого поля $d/d\mu$ в результате переноса Ли его путей (интегральных кривых) и его параметра μ. Кривые (1)—(4) — это кривые λ-конгруэнции. Кривая (A) — это μ-кривая, проходящая через точку P; в результате переноса Ли на расстояние $\Delta\lambda$ она отображается в кривую (A'), проходящую через точку Q. Кривая (B) — это μ-кривая исходной конгруэнции, также проходящая через точку Q. Образ кривой (B), получаемый в результате переноса, не показан. Вообще (B) и (A') — различные кривые. Если же они совпадают, то мы говорим, что μ-конгруэнция является ли-тянутой.

отображения переноса Ли на $\Delta\lambda$. Если эти векторное поле и конгруэнция инвариантны при *всех* $\Delta\lambda$, то мы говорим, что они *ли-тянуты* векторным полем $d/d\lambda$.

Ли-тянутое векторное поле имеет простой геометрический смысл, который поясняется на рис. 3.3. Ясно, что (в пределе для бесконечно малого $\Delta\lambda$ и бесконечно малого расстояния между кривыми (2) и (3)) если поле $d/d\mu$ в точке P «ведёт» по кривой (A) точно из точки P в точку R, то $d/d\mu^*_{\Delta\lambda}$ ведёт по кривой (A') точно из точки Q в точку S. В случае когда $d/d\mu$ — ли-тянутое векторное поле, кривая (B) (см. рис. 3.2) совпадает с кривой (A') и $(d/d\mu^*_{\Delta\lambda})_Q = (d/d\mu)_Q$ а следовательно, $d/d\mu$ также ведёт из Q в S. Вспоминая наше обсуждение скобок Ли в § 2.14, заключаем, что $[d/d\lambda, d/d\mu] = 0$: векторное поле является ли-тянутым, если его скобка Ли с полем, осуществляющим перенос («тянущим» полем), обращается в нуль:

$$[d/d\lambda, \quad d/d\mu] = 0. \tag{3.1}$$

Можно посмотреть на дело и иначе. Предположим, что на рис. 3.3 нам задана не вся конгруэнция, а лишь единственная кривая (A) с параметром μ. Тогда, выполняя перенос Ли этой кривой для всех возможных значений $\Delta\lambda$, можно породить всю конгруэнцию. Одной из таких порожденных кривых будет (A'). Обозначим порождённое таким образом поле через $d/d\mu_L$. В силу построения вектор $d/d\lambda$ всегда касателен к кривой с фиксированным значением μ_L, а вектор $d/d\mu_L$ — к кривой с фиксированным значением λ. Отсюда следует, что эти векторные поля должны коммутировать.

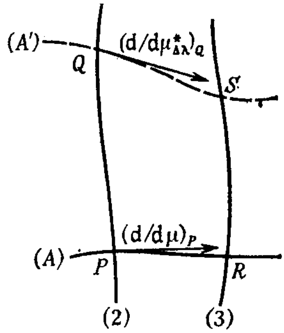

Рис. 3.3. Средняя часть рис. 3.2. Кривая (B) не изображена. К кривым (A) и (A') в точках P и Q соответственно проведены касательные векторы.

3.4. ПРОИЗВОДНЫЕ ЛИ

Понятие переноса позволяет дать определение производной вдоль конгруэнции. Любые попытки определить производные векторных и тензорных полей сопряжены с определёнными трудностями. Предположим, мы хотим определить производную векторного поля как предел разности между векторами в различных точках, поделённой на расстояние между ними. Первая проблема — определить «расстояние» между точками. Если заданные точки лежат на одной кривой конгруэнции, то расстояние между ними можно определить как разность значений параметра в этих точках. (В результате мы получим производную по параметру; в случае многообразий без метрики на большее рассчитывать и не приходится.) Вторая и более серьёзная проблема — как сравнивать векторы в различных точках, т. е. как ответить на вопрос, будут векторы в разных точках «параллельны» или нет. В случае эвклидовой плоскости ответ на этот вопрос прост и однозначен. Для искривлённой поверхности ответ уже может не быть однозначным. В случае же произвольного дифференцируемого многообразия вопрос о параллельности векторов в различных точках вообще не имеет смысла, поскольку не существует правил, по которым можно было бы осуществлять параллельное перенесение векторов. Чтобы определить «абсо-