ное поле является ли-тянутым, если его скобка Ли с полем, осуществляющим перенос («тянущим» полем), обращается в нуль:

$$[\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda, \quad \mathrm{d}/\mathrm{d}\mu] = 0. \tag{3.1}$$

Можно посмотреть на дело и иначе. Предположим, что на рис. 3.3 нам задана не вся конгруэнция, а лишь единственная кривая (A) с параметром μ. Тогда, выполняя перенос Ли этой кривой для всех возможных значений $\Delta\lambda$, можно породить всю конгруэнцию. Одной из таких порожденных кривых будет (A'). Обозначим порождённое таким образом поле через $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu_L$. В силу построения вектор $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ всегда касателен к кривой с фиксированным значением μ_L, а вектор $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu_L$ — к кривой с фиксированным значением λ. Отсюда следует, что эти векторные поля должны коммутировать.

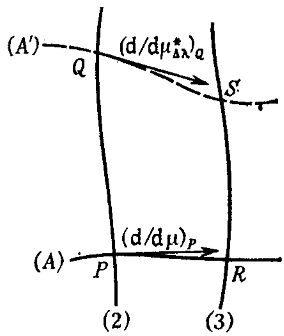

Рис. 3.3. Средняя часть рис. 3.2. Кривая (B) не изображена. К кривым (A) и (A') в точках P и Q соответственно проведены касательные векторы.

3.4. ПРОИЗВОДНЫЕ ЛИ

Понятие переноса позволяет дать определение производной вдоль конгруэнции. Любые попытки определить производные векторных и тензорных полей сопряжены с определёнными трудностями. Предположим, мы хотим определить производную векторного поля как предел разности между векторами в различных точках, поделённой на расстояние между ними. Первая проблема — определить «расстояние» между точками. Если заданные точки лежат на одной кривой конгруэнции, то расстояние между ними можно определить как разность значений параметра в этих точках. (В результате мы получим производную по параметру; в случае многообразий без метрики на большее рассчитывать и не приходится.) Вторая и более серьёзная проблема — как сравнивать векторы в различных точках, т. е. как ответить на вопрос, будут векторы в разных точках «параллельны» или нет. В случае эвклидовой плоскости ответ на этот вопрос прост и однозначен. Для искривлённой поверхности ответ уже может не быть однозначным. В случае же произвольного дифференцируемого многообразия вопрос о параллельности векторов в различных точках вообще не имеет смысла, поскольку не существует правил, по которым можно было бы осуществлять параллельное перенесение векторов. Чтобы определить «абсолютную» параллельность, многообразие следует наделить ещё одной структурой, называемой *аффинной связностью*. Это делается в гл. 6, посвящённой римановой геометрии. Здесь мы рассмотрим другую конструкцию, полезную при решении любой задачи, в которой центральную роль играет конгруэнция. Конгруэнция сама даёт возможность ввести понятие параллельности в различных точках. Для сравнения векторов в точках λ и $\lambda + \Delta\lambda$, принадлежащих некоторой кривой, достаточно выполнить перенос Ли вектора в точке $\lambda \pm \Delta\lambda$ обратно в точку λ. В результате в точке λ получится новый вектор, вычитая который из старого можно найти разность между ними. Заметим, что эта разность определена *однозначно*, следовательно, заданная конгруэнция однозначно определяет производную. Но эта производная зависит от конгруэнции.

Выведем аналитические формулы для вычисления производной. Для начала рассмотрим скалярную функцию. Вычислим значение скаляра в точке $\lambda_0 + \Delta\lambda$, перенесем его обратно в точку λ_0, вычтем из него значение скаляра в точке λ_0, разделим эту разность на $\Delta\lambda$ и перейдем к пределу при $\Delta\lambda \to 0$. Более подробно, значение скалярного поля f в точке $\lambda_0 + \Delta\lambda$ равно $f(\lambda_0 + \Delta\lambda)$. В результате переноса этого значения мы получим новое (ли-тянутое) поле f^*, удовлетворяющее соотношению $\mathrm{d}f^*/\mathrm{d}\lambda = 0$. Очевидно, его значение в точке λ_0 то же самое, что и в точке $\lambda_0 + \Delta\lambda$: $f^*(\lambda_0) = f(\lambda_0 + \Delta\lambda)$. Следовательно, определённая выше производная имеет вид

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{f^*(\lambda_0) - f(\lambda_0)}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{f(\lambda_0 + \Delta\lambda) - f(\lambda_0)}{\Delta\lambda} = \left(\frac{df}{d\lambda}\right)_{\lambda_0}. \tag{3.2}$$

Полученная формула для *производной Ли* функции f не является, конечно, неожиданной. Для оператора взятия производной Ли имеется специальное обозначение: $\mathcal{L}_{\bar{V}}$; здесь $\bar{V}$ — векторное поле, порождающее отображение переноса (в нашем случае поле $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$). Мы доказали, что для функций

◆ $$\mathcal{L}_{\bar{V}} f = \bar{V}(f) = df/d\lambda. \tag{3.3}$$

Теперь проделаем то же для векторного поля $\bar{U} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$. Поскольку вектор определяется своим действием на функции, мы используем в дальнейших рассуждениях *произвольную* функцию f. В точке λ_0 поле $\bar{U}$ даёт производную $(\mathrm{d}f/\mathrm{d}\mu)_{\lambda_0}$, а в точке $\lambda + \Delta\lambda$ — производную $(\mathrm{d}f/\mathrm{d}\mu)_{\lambda_0 + \Delta\lambda}$. Перенося $\bar{U}(\lambda_0 + \Delta\lambda)$, как в конце § 3.3, мы получаем новое, ли-тянутое поле $\bar{U}^* = \mathrm{d}/\mathrm{d}\mu^*$, удовлетворяющее соотношениям $[\bar{U}^*, \bar{V}] = 0$ и $\bar{U}^*(\lambda_0 + \Delta\lambda) = \bar{U}(\lambda_0 + \Delta\lambda)$. Из обращения коммутатора в нуль следует, что всюду

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\mu^*}f=\frac{d}{d\mu^*}\frac{d}{d\lambda}f. \tag{3.4}$$

Поэтому (для аналитических векторных полей)

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\mu^*}f\right)_{\lambda_0}&=\left(\frac{d}{d\mu^*}f\right)_{\lambda_0+\Delta\lambda}-\Delta\lambda\left(\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\mu^*}f\right)\right)_{\lambda_0}+O(\Delta\lambda^2)\\&=\left(\frac{d}{d\mu}f\right)_{\lambda_0+\Delta\lambda}-\Delta\lambda\left(\frac{d}{d\mu^*}\left(\frac{d}{d\lambda}f\right)\right)_{\lambda_0}+O(\Delta\lambda^2)\\&=\left(\frac{d}{d\mu}f\right)_{\lambda_0}+\Delta\lambda\left(\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\mu}f\right)\right)_{\lambda_0}\\&\qquad-\Delta\lambda\left(\frac{d}{d\mu^*}\left(\frac{d}{d\lambda}f\right)\right)_{\lambda_0}+O(\Delta\lambda^2).\end{aligned}$$

Определим *производную Ли* $\mathcal{L}_{\bar V}\bar U$ как векторное поле, действие которого на f задаётся соотношением

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}_{\bar V}\bar U](f)&=\lim_{\Delta\lambda\to 0}\left[\frac{\bar U^*(\lambda_0)-\bar U(\lambda_0)}{\Delta\lambda}\right](f)\\&=\lim_{\Delta\lambda\to 0}\left[\left(\frac{d}{d\mu^*}f\right)_{\lambda_0}-\left(\frac{d}{d\mu}f\right)_{\lambda_0}\right]\Big/\Delta\lambda\\&=\lim_{\Delta\lambda\to 0}\left(\frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\mu}f-\frac{d}{d\mu^*}\frac{d}{d\lambda}f\right).\end{aligned} \tag{3.5}$$

Ясно, что разность между μ^* и μ — первого порядка по $\Delta\lambda$; отсюда следует, что для получения предела последнего выражения нужно просто заменить μ^* на μ. Поскольку это равенство верно для всех f, мы имеем

◆ $$\mathcal{L}_{\bar V}\bar U=\frac{d}{d\lambda}\bar U-\frac{d}{d\mu}\bar V=[\bar V,\ \bar U]. \tag{3.6}$$

Этот результат также является совершенно естественным. Действительно согласно определению производной Ли вдоль $\bar V$, векторное поле имеет нулевую производную Ли, если оно ли-тянуто, т. е. если оно коммутирует с $\bar V$. Поэтому можно было с самого начала ожидать, что производная Ли одного векторного поля вдоль другого совпадает с их коммутатором. В силу антисимметрии скобки Ли мы получаем

$$\mathcal{L}_{\bar V}\bar U=-\mathcal{L}_{\bar U}\bar V. \tag{3.7}$$

Упражнение 3.1. (а) Покажите, что для произвольных дважды дифференцируемых полей $\bar V$ и $\bar U$ выполняется (на функциях и полях) тождество

$$[\mathcal{L}_{\bar V},\ \mathcal{L}_{\bar W}]=\mathcal{L}_{[\bar V,\ \bar W]}. \tag{3.8}$$

(b) Докажите тождество Якоби для производных Ли на функциях и векторных полях

$$[[\mathcal{L}_{\bar{X}}, \mathcal{L}_{\bar{Y}}], \mathcal{L}_{\bar{Z}}]+[[\mathcal{L}_{\bar{Y}}\mathcal{L}_{\bar{Z}}], \mathcal{L}_{\bar{X}}]+[[\mathcal{L}_{\bar{Z}}, \mathcal{L}_{\bar{X}}], \mathcal{L}_{\bar{Y}}]=0; \tag{3.9}$$

здесь $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ — произвольные трижды дифференцируемые векторные поля.

[Указание: для проверки утверждения (a) на векторах покажите, что (3.8) равносильно (2.14); для проверки утверждения (b) на векторах воспользуйтесь равенством (3.8) и непосредственно вытекающим из определения производной Ли соотношением $\mathcal{L}_{\bar{A}} + \mathcal{L}_{\bar{B}} = \mathcal{L}_{\bar{A}+\bar{B}}$.]

Упражнение 3.2. (a) Докажите формулу Лейбница

$$\mathcal{L}_{\bar{V}}(f\bar{U}) = (\mathcal{L}_{\bar{V}}f)\bar{U} + f\mathcal{L}_{\bar{V}}\bar{U}, \tag{3.10}$$

используя определения производной Ли $\mathcal{L}_{\bar{V}}$ на функциях и векторных полях.

(b) Из (2.7) следует, что компоненты $\mathcal{L}_{\bar{V}}\bar{U}$ в *координатном базисе* имеют вид

$$(\mathcal{L}_{\bar{V}}\bar{U})^i = V^j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^j} U^i - U^j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^j} V^i. \tag{2.7}$$

Используя утверждение (a), покажите, что для векторных полей, заданных в произвольном базисе $\{\bar{e}_i\}$,

$$(\mathcal{L}_{\bar{V}}U)^i = V^j\bar{e}_j(U^i) - U^j\bar{e}_j(V^i) + V^jU^k(\mathcal{L}_{\bar{e}_j}\bar{e}_k)^i, \tag{3.11}$$

где $\bar{e}_j(U_i)$ — производная функции U^i вдоль векторного поля $\bar{e}_j$.

Упражнение 3.3. Рассмотрим систему координат, для которой $\bar{V}$ является одним из векторов координатного базиса, скажем $\partial/\partial x^1$. Покажите, что для любого векторного поля $\bar{W}$ выполняется соотношение

$$\blacklozenge \quad (\mathcal{L}_{\bar{V}}\bar{W})^i = \partial W^i/\partial x^1, \tag{3.12}$$

т. е. определение производной Ли — это бескоординатная форма определения частной производной.

3.5. ПРОИЗВОДНАЯ ЛИ ОДИН-ФОРМЫ

Поскольку поля один-форм и тензоров более высокого ранга определяются через векторные поля и скалярные функции, можно из уже данных определений производной Ли для векторов и скаляров получить определение производной Ли для один-форм. Идея определения та же самая. Скажем, что поле один-форм *ли-тянуто*, если его значение на любом ли-