(b) Докажите тождество Якоби для производных Ли на функциях и векторных полях

$$[[\mathcal{L}_{\bar X}, \mathcal{L}_{\bar Y}], \mathcal{L}_{\bar Z}]+[[\mathcal{L}_{\bar Y}\mathcal{L}_{\bar Z}], \mathcal{L}_{\bar X}]+[[\mathcal{L}_{\bar Z}, \mathcal{L}_{\bar X}], \mathcal{L}_{\bar Y}]=0; \tag{3.9}$$

здесь $\bar X$, $\bar Y$, $\bar Z$ — произвольные трижды дифференцируемые векторные поля.

[Указание: для проверки утверждения (а) на векторах покажите, что (3.8) равносильно (2.14); для проверки утверждения (b) на векторах воспользуйтесь равенством (3.8) и непосредственно вытекающим из определения производной Ли соотношением $\mathcal{L}_{\bar A}+\mathcal{L}_{\bar B}=\mathcal{L}_{\bar A+\bar B}$.]

Упражнение 3.2. (а) Докажите формулу Лейбница

$$\mathcal{L}_{\bar V}(f\bar U)=(\mathcal{L}_{\bar V}f)\bar U+f\mathcal{L}_{\bar V}\bar U, \tag{3.10}$$

используя определения производной Ли $\mathcal{L}_{\bar V}$ на функциях и векторных полях.

(b) Из (2.7) следует, что компоненты $\mathcal{L}_{\bar V}\bar U$ в *координатном базисе* имеют вид

$$(\mathcal{L}_{\bar V}\bar U)^i=V^j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^j}U^i-U^j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^j}V^i. \tag{2.7}$$

Используя утверждение (а), покажите, что для векторных полей, заданных в произвольном базисе $\{\bar e_i\}$,

$$(\mathcal{L}_{\bar V}U)^i=V^j\bar e_j(U^i)-U^j\bar e_j(V^i)+V^jU^k(\mathcal{L}_{\bar e_j}\bar e_k)^i, \tag{3.11}$$

где $\bar e_j(U_i)$ — производная функции U^i вдоль векторного поля $\bar e_j$.

Упражнение 3.3. Рассмотрим систему координат, для которой $\bar V$ является одним из векторов координатного базиса, скажем $\partial/\partial x^1$. Покажите, что для любого векторного поля $\bar W$ выполняется соотношение

◆ $$(\mathcal{L}_{\bar V}\bar W)^i=\partial W^i/\partial x^1, \tag{3.12}$$

т. е. определение производной Ли — это бескоординатная форма определения частной производной.

3.5. ПРОИЗВОДНАЯ ЛИ ОДИН-ФОРМЫ

Поскольку поля один-форм и тензоров более высокого ранга определяются через векторные поля и скалярные функции, можно из уже данных определений производной Ли для векторов и скаляров получить определение производной Ли для один-форм. Идея определения та же самая. Скажем, что поле один-форм *ли-тянуто*, если его значение на любом литянутом векторном поле постоянно[1]. Чтобы найти производную Ли, переносим[2] один-форму из точки $\lambda_0 + \Delta\lambda$ обратно в точку λ_0, затем вычитаем один-форму в этой точке и т. д. В результате мы получим, что если $\tilde{\omega}$ — поле один-форм, то $\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}$ — производная Ли от $\tilde{\omega}$ вдоль $\bar{V}$ — есть поле один-форм, определяемое следующим правилом (правилом Лейбница для производных первого порядка):

$$\mathcal{L}_{\bar{V}}[\tilde{\omega}(\bar{W})] = (\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega})(\bar{W}) + \tilde{\omega}(\mathcal{L}_{\bar{V}}\bar{W}) \tag{3.13}$$

для произвольного векторного поля $\bar{W}$. Поскольку $\tilde{\omega}(\bar{W})$ — просто функция, производная $\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}$ определена через уже известные нам операции — через производные Ли от функций и векторных полей.

Упражнение 3.4. Пользуясь формулой (3.13) и соотношением (2.7) для компонент поля $\mathcal{L}_{\bar{V}}\bar{W} = [\bar{V}, \bar{W}]$, покажите, что $\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}$ имеет в координатном базисе компоненты, равные

$$(\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega})_i = V^j \frac{\partial}{\partial x^j}\omega_i + \omega_j \frac{\partial}{\partial x^i} V^j. \tag{3.14}$$

◆

Естественное обобщение формулы (3.13) на тензоры более высокого ранга приводит к следующим свойствам производной Ли:

$$\mathcal{L}_{\bar{V}}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}) = (\mathcal{L}_{\bar{V}}\mathbf{A})\otimes\mathbf{B} + \mathbf{A}\otimes(\mathcal{L}_{\bar{V}}\mathbf{B}), \tag{3.15}$$

$$\mathcal{L}_{\bar{V}}(\mathbf{T}(\tilde{\omega}, \ldots; \bar{U}, \ldots)) = (\mathcal{L}_{\bar{V}}\mathbf{T})(\tilde{\omega}, \ldots; \bar{U}, \ldots) + \mathbf{T}(\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}, \ldots; \bar{U}, \ldots) + \ldots + \mathbf{T}(\tilde{\omega}, \ldots; \mathcal{L}_{\bar{V}}\bar{U}, \ldots) + \ldots, \tag{3.16}$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{T}$ — произвольные тензоры, а $\tilde{\omega}, \ldots$ и $\bar{U}, \ldots$ — произвольные один-формы и векторы соответственно.

3.6. ПОДМНОГООБРАЗИЯ

Подмногообразие многообразия M — это такое многообразие, которое является гладким подмножеством в M. Если M — обычное трёхмерное эвклидово пространство, то обычные гладкие поверхности и кривые служат его подмногообразиями. Для четырёхмерного пространства-времени Минковского (§ 2.31) подмногообразиями будут, например, трёхмерное пространство событий, происходящих с точки зрения некоторого фиксированного наблюдателя одновременно с данным событием (т. е. множество точек с одинаковой времен-

[1] Вдоль интегральных кривых «тянущего» поля. — *Прим. ред.*
[2] При помощи ли-тянутого поля один-форм. — *Прим. ред.*