тянутом векторном поле постоянно[1]. Чтобы найти производную Ли, переносим[2] один-форму из точки $\lambda_0+\Delta\lambda$ обратно в точку λ_0, затем вычитаем один-форму в этой точке и т. д. В результате мы получим, что если $\tilde{\omega}$ — поле один-форм, то $\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}$ — производная Ли от $\tilde{\omega}$ вдоль $\bar{V}$ — есть поле один-форм, определяемое следующим правилом (правилом Лейбница для производных первого порядка):

$$\mathcal{L}_{\bar{V}}[\tilde{\omega}(\bar{W})]=(\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega})(\bar{W})+\tilde{\omega}(\mathcal{L}_{\bar{V}}\bar{W}) \tag{3.13}$$

для произвольного векторного поля $\bar{W}$. Поскольку $\tilde{\omega}(\bar{W})$ — просто функция, производная $\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}$ определена через уже известные нам операции — через производные Ли от функций и векторных полей.

Упражнение 3.4. Пользуясь формулой (3.13) и соотношением (2.7) для компонент поля $\mathcal{L}_{\bar{V}}\bar{W}=[\bar{V},\ \bar{W}]$, покажите, что $\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega}$ имеет в координатном базисе компоненты, равные

$$\blacklozenge \quad (\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega})_i=V^j\frac{\partial}{\partial x^j}\omega_i+\omega_j\frac{\partial}{\partial x^i}V^j. \tag{3.14}$$

Естественное обобщение формулы (3.13) на тензоры более высокого ранга приводит к следующим свойствам производной Ли:

$$\mathcal{L}_{\bar{V}}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})=(\mathcal{L}_{\bar{V}}\mathbf{A})\otimes\mathbf{B}+\mathbf{A}\otimes(\mathcal{L}_{\bar{V}}\mathbf{B}), \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\bar{V}}(\mathbf{T}(\tilde{\omega},\ \ldots;\ \bar{U},\ \ldots))&=(\mathcal{L}_{\bar{V}}\mathbf{T})(\tilde{\omega},\ \ldots;\ \bar{U},\ \ldots)\\&+\mathbf{T}(\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega},\ \ldots;\ \bar{U},\ \ldots)+\ldots+\mathbf{T}(\tilde{\omega},\ \ldots;\ \mathcal{L}_{\bar{V}}\bar{U},\ \ldots)+\ldots,\end{aligned} \tag{3.16}$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{T}$ — произвольные тензоры, а $\tilde{\omega}$, ... и $\bar{U}$, ... — произвольные один-формы и векторы соответственно.

3.6. ПОДМНОГООБРАЗИЯ

Подмногообразие многообразия M — это такое многообразие, которое является гладким подмножеством в M. Если M — обычное трёхмерное эвклидово пространство, то обычные гладкие поверхности и кривые служат его подмногообразиями. Для четырёхмерного пространства-времени Минковского (§ 2.31) подмногообразиями будут, например, трёхмерное пространство событий, происходящих с точки зрения некоторого фиксированного наблюдателя одновременно с данным событием (т. е. множество точек с одинаковой времен-

[1] Вдоль интегральных кривых «тянущего» поля. — *Прим. ред.*
[2] При помощи ли-тянутого поля один-форм. — *Прим. ред.*

ной координатой t), а также гиперболоид всех событий, отстоящих на постоянный интервал Δs^2 от заданного события. Иногда вместо слова «подмногообразие» употребляют слово «гиперповерхность», в иных же учебниках под гиперповерхностью понимают только такое многообразие, размерность которого на единицу меньше размерности M.

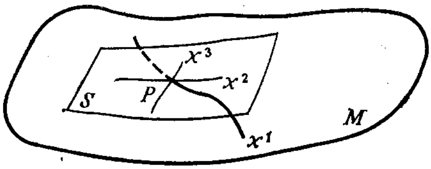

Рис. 3.4. Изображены двумерное подмногообразие S трёхмерного многообразия M и система координат в окрестности точки P, удовлетворяющая определению, данному в тексте. Координатная линия x^1 пересекает S только в точке P.

Хотя понятие подмногообразия довольно наглядно, слово «гладкий», которое мы употребили выше, нуждается в уточнении. В разных руководствах предлагаются разные (и не эквивалентные) определения гладкости. Мы примем такое определение, которое обеспечивает наибольшую гладкость и более всего отвечает нашему определению многообразия. Итак, m-мерное *подмногообразие* S n-мерного многообразия M — это множество точек многообразия M, обладающее следующим свойством: в некоторой открытой окрестности в M произвольной точки P из S существует такая система координат для M, в которой точки S, лежащие в этой окрестности, определяются соотношениями $x^1 = x^2 = \ldots = x^{n-m} = 0$ (см. рис. 3.4). Одномерные подмногообразия — это *кривые*; предъявляемые к ним требования гладкости иллюстрирует рис. 3.5. Из данного выше определения очевидным образом вытекает, что всякое подмногообразие S само является многообразием, ибо покрывается соответствующими координатными окрестностями (картами). В том частном случае, когда $m = n$, всякое открытое подмножество многообразия M будет его подмногообразием.

Рис. 3.5. Кандидат в одномерные подмногообразия двумерного многообразия, который не проходит, так как пересекает сам себя в точке P. В этой точке нельзя построить требуемые координаты. Таким образом, не все, а лишь некоторые кривые являются подмногообразиями.

Наш интерес к подмногообразиям объясняется главным образом тем, что решения дифференциальных уравнений, записываемые обычно в виде $\{y_i = f_i(x^1, \ldots, x^m),\ i = 1, \ldots, p\}$, можно представлять себе как подмногообразия с координатами $\{x^1, \ldots, x^m\}$ некоторого большего многообразия с координатами $\{y_1, \ldots, y_p, x^1, \ldots, x^m\}$. Однако изучение подмногообразий мы начнём в ином аспекте, и лишь в гл. 4 увяжем его с дифференциальными уравнениями.

Пусть P — точка подмногообразия S (размерности m) многообразия M (размерности n). Всякая кривая в S, проходящая через точку P, будет также кривой в M, проходящей через P; отсюда очевидным образом следует, что касательный вектор к такой кривой в точке P является элементом как пространства T_P, касательного к M в точке P, так и пространства V_P, касательного к S в точке P. В действительности V_P есть векторное подпространство размерности m в T_P. С другой стороны, произвольный вектор, принадлежащий T_P, но не принадлежащий V_P, не имеет однозначной «естественной» проекции на V_P (напомним, что в общем случае понятие ортогональности не вводится).

Для один-форм в точке P ситуация в точности обратная. Пусть T_P^* — сопряжённое к T_P пространство; это совокупность всех один-форм в точке P, каковые суть функции, определённые на всём T_P. Аналогично пусть V_P^* — сопряжённое к V_P, т. е. пространство один-форм в точке P, рассматриваемой уже как точка многообразия S. Произвольная один-форма из T_P^* определяет один-форму из V_P^*, получаемую просто ограничением со всего T_P на его подпространство V_P. Наоборот, данному элементу из V_P^* нельзя однозначно сопоставить элемент из T_P^*, ибо, зная лишь значения один-формы на V_P, вообще говоря, нельзя сказать, каковы будут её значения на векторах, не принадлежащих V_P.

Итак, вектор, определённый на подмногообразии S, будет также вектором на многообразии M, а один-форма на M будет также один-формой на S. Обратные же утверждения неверны. К один-формам и подмногообразиям мы вернёмся в гл. 4, а пока сосредоточим внимание на векторных полях.

3.7. ТЕОРЕМА ФРОБЕНИУСА НА ЯЗЫКЕ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

В произвольной карте подмногообразия S имеются координаты $\{y^a, a = 1, \ldots, m\}$ и базис $\{\partial/\partial y^a\}$ векторных полей на S. Эти базисные поля коммутируют:

$$[\partial/\partial y^a, \quad \partial/\partial y^b] = 0. \tag{3.17}$$

Упражнение 3.5. (а) Покажите, что если $\bar{V}$ и $\bar{W}$ — линейные комбинации (необязательно с постоянными коэффициентами) m попарно коммутирующих векторных полей, то и скобка Ли $\bar{V}$ и $\bar{W}$ будет линейной комбинацией тех же m полей.